**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY**

# CHARAKTERISTIKY STOCHASTICKÝCH PROCESŮ ZATÍŽENÍ, NAMÁHÁNÍ A KMITÁNÍ

**doc. Ing. Miloš Vlk, CSc.**

1. Procesy v mechanických systémech a jejich analýza
1.1 Druhy procesů
1.2 Frekvenční analýza
1.2.1 Fourierova řada
1.2.2 Fourierova transformace
2. Deterministické procesy
2.1 Rozdělení deterministických procesů
2.2 Periodické procesy
2.2.1 Harmonické procesy
2.2.2 Neharmonické procesy
2.3 Neperiodické procesy
2.3.1 Kvaziperiodické procesy
2.3.2 Přechodové procesy
3. Stochastické procesy
3.1 Základní pojmy
3.2 Charakteristiky souboru realizací
4. Stacionární náhodné procesy
4.1 Pojem stacionarity
4.2 Charakteristiky stacionárních procesů druhého řádu
5. Ergodické náhodné procesy
5.1 Pojem ergodicita procesu
5.2 Hustota pravděpodobnosti
5.3 Časové hodnoty momentů
5.4 Časová autokorelační a autokovarianční funkce
5.5 Výkonová spektrální hustota
5.5.1 Fyzikální představa VSH
5.5.2 VSH a periodogram
5.5.3 VSH a Fourierova transformace
5.5.4 Různé způsoby prezentace spektra
5.5.5 Cepstrum
5.5.6 Technický význam VSH
5.6 Počet překročení úrovně
5.7 Rozdělení extrémů
6. Systémy stacionárních ergodických náhodných procesů
6.1 Vzájemná korelační a vzájemná kovarianční funkce
6.2 Vzájemná výkonová spektrální hustota
6.3 Koherenční funkce
6.4 Frekvenční přenos
7. Nestacionární procesy

# D-1 Procesy v mechanických systémech a jejich analýza

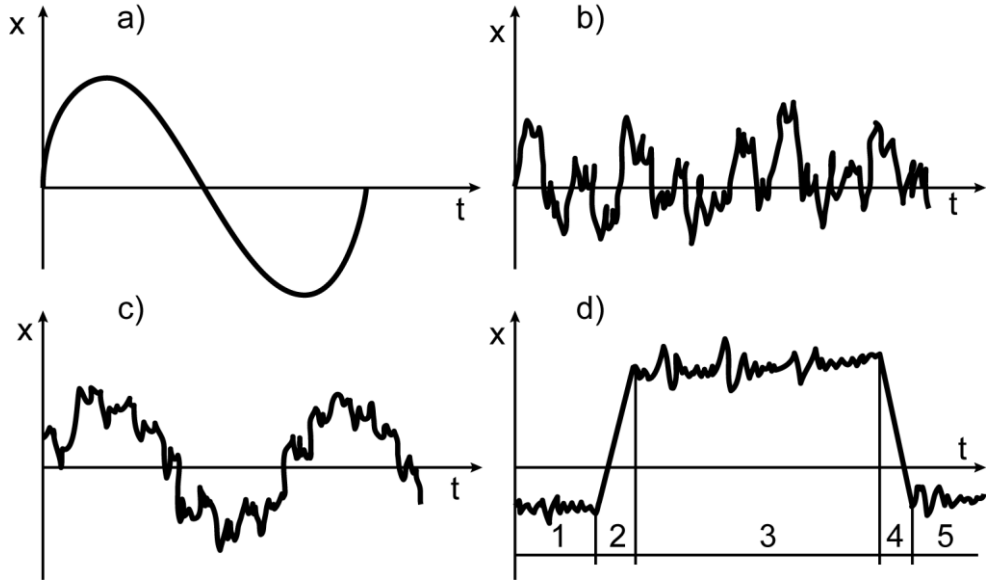
## D-1.1 Druhy procesů

Analýza dynamické soustavy zahrnuje jednak analýzu dynamických vlastností jako celku, jednak analýzu vstupních a výstupních veličin. V problematice zajímající strojního inženýra jsou vstupními veličinami síly, dvojice sil, tlaky atp., výstupními veličinami nejčastěji namáhání, deformace, výchylky, zrychlení – přičemž všechny tyto veličiny jsou

v naprosté většině funkcemi času. Všechny tyto jevy v čase proměnné je možno shrnout pod společný pojem *proces*.

V zásadě je možno rozdělit procesy na (obr. 1):

a) deterministické,
b) stochastické (náhodné),
c) smíšené,
d) nehomogenní.




Obr. 1

ad a) U deterministických procesů můžeme jejich velikost v libovolném okamžiku určit obecně ze soustavy diferenciálních rovnic a známých počátečních podmínek. Při opakování experimentu za stejných podmínek probíhá deterministický proces vždy stejně.

ad b) U stochastických procesů není možno přesně předpovědět jejich velikost; lze je pouze popsat pomocí charakteristik matematické statistiky. I při opakování experimentu za stejných podmínek poskytuje stochastický proces navzájem se lišící průběhy. Příklad: namáhání podvozku automobilu při jízdě terénem.

ad c) V praxi se často setkáváme s procesy, které obsahují deterministickou i stochastickou složku ve zhruba stejném poměru. Tento charakter má např. celá řada zatěžujících sil působících na stroje a zařízení v provozních podmínkách.

ad d) Posuzování a analýzu strukturně nehomogenního procesu lze uskutečnit pouze pro jeho homogenní části navzájem spojené úseky přechodového charakteru. Některé procesy mohou být natolik nestacionární (resp. nehomogenní), že je obtížné je matematicky jednoduše popsat.

Představu o charakteru namáhání v konstrukcích poskytují výsledky průzkumu americké firmy MTS:

- konstantní amplituda harmonického průběhu 2 %,
- konstantní amplituda trojúhelníkového průběhu 5 %,
- spektrum konstantních amplitud 12 %,
- náhodné stacionární 9 %,
- náhodné nestacionární 13 %,
- náhodné kvazistacionární (stacionární ve střední hodnotě a rozptylu) 41 %,
- přechodové 13 %,

- speciální 5 %.

Jak je z tohoto přehledu zřejmé, zahrnují náhodné procesy téměř 2/3 všech procesů, procesy s konstantní amplitudou pak asi 1/5. Přitom při pevnostním posuzování se vychází výhradně z materiálových charakteristik získaných při zkouškách s konstantní amplitudou napětí nebo deformace, tedy za podmínek výrazně se lišících od provozních. Obdobně se dosud převážná většina ověřovacích laboratorních zkoušek životnosti uskutečňuje při konstantní amplitudě zatížení (případně při takovémto vícestupňovém zatížení).

## D-1.2 Frekvenční analýza

Pro řešení řady úloh je účelné transformovat časový průběh procesu (v našem případě mechanických soustav ať již buzení nebo odezvy) do frekvenční oblasti, tedy nahradit jej posloupností jeho frekvenčních složek. Tato operace se nazývá ***frekvenční (kmitočtová) analýza***. Takto získané frekvenční složky poskytují důležité informace především o zdrojích kmitání. Buzení libovolného časového průběhu (včetně rázů) je možno nahradit posloupností elementárních pulzů různých frekvencí a amplitud. To potom umožní vyšetřit u lineárních soustav odezvu na libovolné buzení. Z porovnání frekvenční analýzy buzení a odezvy je možno posoudit možnosti vzniku nebezpečných rezonančních stavů za různých provozních poměrů. Ze změny frekvenčních složek v průběhu používání konstrukce je možno usuzovat též na vznik a rozvoj porušení; této skutečnosti se využívá pro provozní diagnostiku.

U periodických procesů se určení amplitud a fázových úhlů jednotlivých harmonických složek nazývá harmonickou analýzou; užívá se k tomu rozvoje do Fourierovy řady. Získaná spektra (amplitudová a fázová) jsou diskrétní. U náhodných procesů se ke stejnému účelu provádí Fourierova integrální transformace; získaná spektra jsou spojitá. Pro zjištění působení jednotlivých zdrojů mechanického kmitání na mechanickou soustavu jsou důležitá výkonová spektra, vyjádřená výkonovou spektrální hustotou.

### D-1.2.1 Fourierova řada

Každy periodický proces je možno interpretovat jako superpozici nekonečně mnoha elementárních průběhů sinového nebo kosinového tvaru.

Fourierova řada k dané funkci *x(t)* (která splňuje Dirichletovy podmínky o spojitosti funkce v uvažovaném časovém intervalu) je nekonečná řada

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$T$ … základní perioda

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ …. základní úhlová (kruhová) frekvence

Vhodnější je vyjádření Fourierovy řady ve tvaru

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \psi_k)$$

k = 1, 2, …

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \psi_k = \operatorname{arctg} \frac{-b_k}{a_k}$$

Určování koeficientů $A_k$ a $\psi_k$ se nazývá ***harmonickou analýzou***. Jednotlivé elementární průběhy $A_k \cos(k\omega t + \psi_k)$ jsou nazývány ***harmonickými složkami*** nebo jen harmonickými. Veličina $A_k$ je pak ***amplitudou*** a $\psi_k$ ***fází harmonické složky***. Přiřazení amplitud ke kmitočtu se nazývá ***spektrum amplitud***; přiřazení fázových úhlů ke kmitočtu je pak ***spektrum fázových úhlů***.

Vzhledem k tomu, že koeficienty $A_k$ jsou určeny jen hodnotami funkce v intervalu periodicity (0, T), je možno sestrojit Fourierovu řadu i k funkci, která není periodická, ale která je buď definována jen na intervalu (0, T) nebo která je různá od nuly jen na konečném intervalu.

***Výkonové spektrum*** periodického signálu představuje výkony jednotlivých harmonických složek na odporu 1 Ω , čili posloupnost hodnot $A_k^2 / 2$ , kde $A_k$ jsou amplitudy jednotlivých harmonických složek. Toto spektrum popisuje frekvenční rozložení výkonu periodického signálu; součet všech jeho složek dává celkový výkon signálu.

U jednorázových (neperiodických) průběhů mluvíme o energetickém spektru, které je popsáno spojitou funkcí, tzv. energetickou spektrální hustotou.

## D-1.2.2 Fourierova transformace

U Fourierovy transformace (zkráceně FT) se nahrazuje původní signál (***originál***) posloupností harmonických funkcí rozdílných frekvencí a fází tak, aby součet těchto jednoduchých vln dal originál. Tato ***přímá FT*** je definována vztahem

$$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).\exp(-j2\pi ft) dt$$

Komplexní funkce *X(f)* se potom nazývá Fourierovou transformací nebo obrazem komplexní nebo reálné funkce *x(t)*.

Originály je pak možno získat z obrazů ***zpětnou (inverzní) FT*** definovanou vztahem

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot \exp(j2\pi ft) df$$

Ve složkovém tvaru

$$F\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \sin(2\pi ft) dt$$

$$X(f) = Re\{X(f)\} - j.Im\{X(f)\}$$

Je-li funkce *x(t)* sudá, tj. platí-li *x(-t) = x(t)*, pak funkce *x(t)*.cos(2$\pi$*ft*) je také sudá a funkce *x(t)*.sin(2$\pi$*ft*) je lichá; na na uvedeném intervalu potom je

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\sin(2\pi ft)dt = 0$$

a tedy

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi ft)dt = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cdot\cos(2\pi ft)dt$$

Analogicky by se určila inverzní Fourierova transformace sudé funkce x(t)

$$x(t) = 2\int_{0}^{\infty} X(f)\cdot\cos(2\pi ft)df$$

Mají-li být celkové energie v časové a frekvenční oblasti stejné (Parsevalův teorém), musí platit

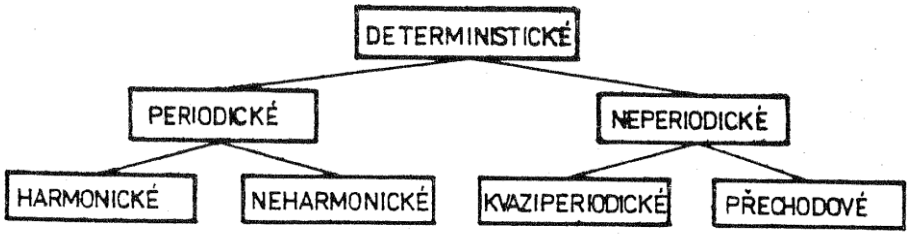
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)\right]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|X(f)\right|^2 df$$

Při zpracování náhodných procesů na počítači se vychází z navzorkovaných dějů. Zde se potom využívá ***diskrétní Fourierova transformace*** (DFT). V tomto případě má tedy jak originál tak i obraz diskrétní průběh. Výpočet DFT je časově náročný – předpokládá provést $N^2$ komplexních násobení a $N^2$ komplexních sčítání (N je počet vzorků). Tuto činnost efektivně zkracují algoritmy ***rychlé Fourierovy transformace*** (FFT).

# D-2 Deterministické procesy a jejich charakteristiky

## D-2.1 Rozdělení deterministických procesů

Stručný přehled deterministických procesů je uveden na obr. 2. Z hlediska nebezpečí únavového porušení jsou důležité procesy periodické a kvaziperiodické. Do skupiny „jiných procesů“ je možno zahrnout procesy s konstantní úrovní, procesy po částech konstantní.




Obr. 2

## D-2.2 Periodické procesy

Proces charakterizovaný jednou skalární proměnnou $x(t)$ je periodický, jestliže platí $x(t) = x(t+T)$, kde $T$ je perioda procesu, $f = 1/T$ jeho frekvence.

Jeho střední hodnota v intervalu $\langle 0, T\rangle$ je

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

Z praktických důvodů je užitečnější efektivní hodnota

$$x_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t)\right]^2 dt} = x_{\text{RMS}}$$

(RMS = root mean square)

Dalšími charakteristickými veličinami jsou součinitel tvaru

$$F_{\text{t}} = \frac{x_{\text{ef}}}{\bar{x}}$$

a součinitel výkmitu

$$F_{\text{c}} = \frac{výkmit}{x_{\text{ef}}}$$

(Výkmit je maximální hodnota veličiny v daném časovém intervalu.)

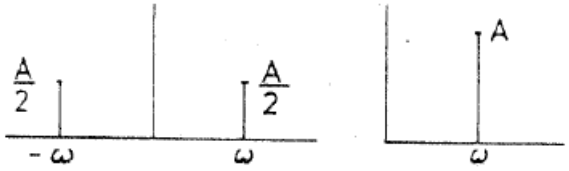
### D-2.2.1 Harmonické procesy

Jsou základním případem periodických procesů; lze je popsat funkcí

$$x(t) = A\cos(\omega t + \psi)$$

kde $A$ je amplituda a $\psi$ je počáteční fázové posunutí proměnné $x$ v čase $t = 0$.

Amplitudové spektrum je diskrétní; znázorňuje se jako oboustranné nebo jako jednostranné (obr. 3)




Obr. 3

Střední hodnota harmonického procesu za půlperiodu je

$$\bar{x} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} A\sin\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}A \approx 0{,}636A$$

Efektivní hodnota

$$x_{\text{ef}} = x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} A^2\sin^2\omega t\,dt} = \frac{\sqrt{2}}{2}A \approx 0{,}707A$$

Součinitel tvaru

$$F_{\text{t}} = \frac{x_{\text{ef}}}{\bar{x}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$$

Součinitel výkmitu

$$F_{\text{c}} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$$

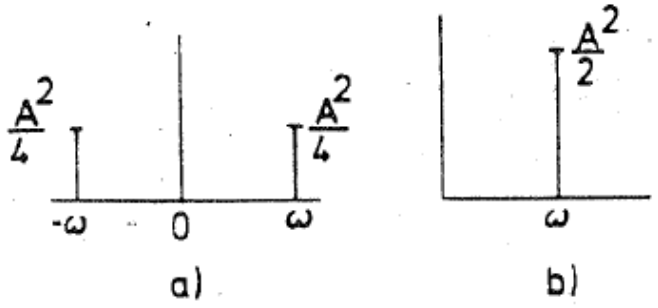
Všimněme si ještě výkonu u harmonického procesu. Okamžitý výkon procesu je úměrný čtvrci okamžité hodnoty procesu: tak např. u mechanického kmitání je úměrný čtvrci výchylky, u elektrického proudu čtvrci napětí atd., tedy

$$P = c \cdot \left[ x(t) \right]^2$$

Střední výkon za jednu periodu je

$$P_{\text{stř}} = \frac{c}{T} \int_0^T \left[ x(t) \right]^2 \mathrm{d}t = \frac{c}{T} \int_0^T \left[ A\cos(\omega t + \psi) \right]^2 \mathrm{d}t = \frac{A^2}{2}$$

Výkonové spektrum se vyjadřuje jako oboustranné nebo jako jednostranné (obr. 4) - obdobně jako dříve uvedené amplitudové spektrum.




Obr. 4

### D-2.2.2 Neharmonické procesy

Tento druh procesů může vzniknout z jednoduchých harmonických procesů, jejichž periody (a tedy i kmitočty) jsou v poměrech, které jsou racionálními čísly. Je-li alespoň jdden z těchto poměrů iracionální číslo, jedná se o neperiodický proces. To tedy též znamená, že neharmonický periodický proces je možno rozložit na řadu harmonických procesů, jejich periody jsou vůči sobě v poměrech, které jsou racionálními čísly. Mohou být popsány funkcí

$$x(t) = x(t \pm pT_{\text{v}})$$

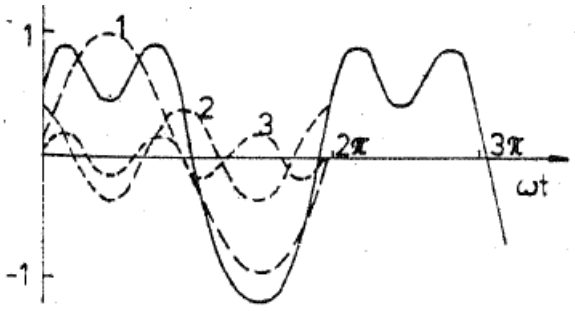
kde $p = 1, 2, 3...$

Základní frekvence

$$f_{\text{v}} = \frac{1}{T_{\text{v}}}$$

odpovídá největšímu společnému děliteli frekvencí dílčích harmonických procesů.

$T_{\text{v}}$ je základní perioda; je rovna společnému násobku dílčích period.



Obr. 5

Tak např. na obr. 5 je znázorněn proces

$$x(t)=\sin(2\pi t)+0{,}5\cos(4\pi t)+0{,}25\sin(6\pi t)$$

Zde je $f_1 : f_2 = 1:2,\ f_1 : f_3 = 1:3$, což jsou racionální čísla. Základní frekvence $f_\mathrm{v} = 1\ \mathrm{Hz}$, základní perioda $T_\mathrm{v} = T_1 = 2T_2 = 3T_3 = 1\ \mathrm{s}$. Nenulové koeficienty Fourfierovy řady jsou $b_1 = 1,\ b_2 = 0{,}5,\ b_3 = 0{,}25$.

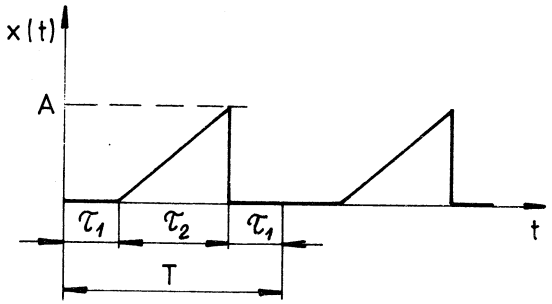
Základní frekvence se nemusí vždy ve vyšetřovaném procesu objevit jako jedna z jeho složek. Tak např. u procesu s $f_1 = 60$ Hz, $f_2 = 75$ Hz, $f_3 = 100$ Hz je základní frekvence $f_\mathrm{v} = 5$ Hz, základní perioda $T_v = 0{,}2$ s, takže v tomto případě

$$x(t) = x(t \pm m \cdot 0{,}2\ \mathrm{s})$$

Protože $f_1 / f_\mathrm{v} = 12$, $f_2 / f_\mathrm{v} = 15$, $f_3 / f_\mathrm{v} = 20$, budou při rozkladu do Fourierovy řady chybět všechny složky s výjimkou $k = 12,\ k = 15,\ k = 20$.

**Příklad 1**

Určete prvé čtyři harmonické složky periodického pohybu znázorněného na obr. 6, je-li $\tau_2 = 1\ \mathrm{s}$, $T = 2\ \mathrm{s}$.



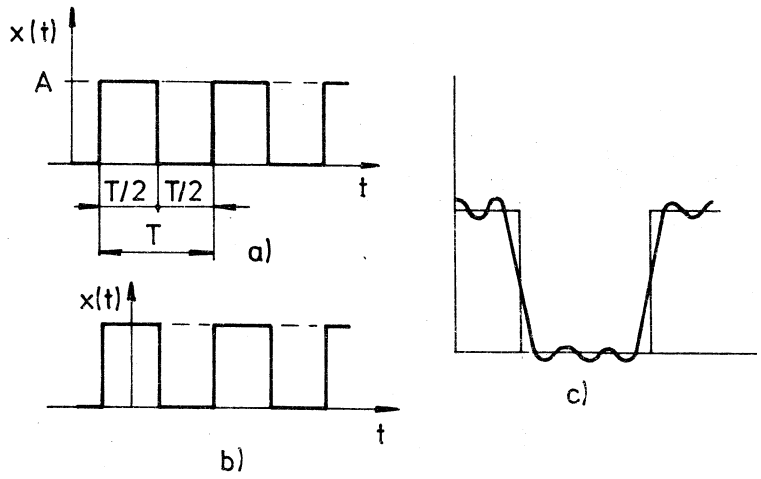

Obr. 6

Výsledek:

| | a | b | ω ($s^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| 1 | -0,3183 | -0,2026 | 3,142 |
| 2 | 0 | 0,1592 | 6,283 |
| 3 | 0,1061 | 0,0225 | 9,425 |
| 4 | 0 | -0,0796 | 12,566 |

**Příklad 2**

Periodickou funkci podle obr. 7 rozveďte do Fourierovy řady. Perioda $T = 2\ \mathrm{s}$.




Obr. 7

Řešení se zjednoduší vhodnou volbou počátku podle obr. 7b). Fukce se stane sudou, takže $b_k = 0$. Je tedy nyní

$$x(t) = A \qquad \text{pro } 0 \le t \le T/4$$
$$x(t) = 0 \qquad \text{pro } T/4 \le t \le 3T/4$$

Výsledek:
Pro sudá *k* jsou $a_k = 0$, pro lichá k jsou $a_k$ střídavě kladné a záporné.

| | a | ω ($s^{-1}$) |
|---|---|---|
| 1 | 0,6366 | 3,142 |
| 3 | -0,2122 | 9,425 |
| 5 | 0,1273 | 15,708 |
| 7 | -0,0909 | 21,991 |

Na obr. 7c) je naznačen průběh funkce vzniklé superpozicí 1., 3. a 5. harmonické.

## D-2.3 Neperiodické procesy

### D-2.3.1 Kvaziperiodické procesy

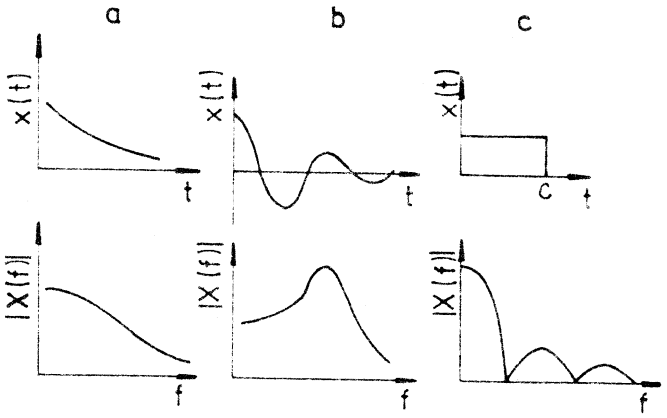
Jsou to takové procesy, u nichž poměry frekvencí jednotlivých složek nejsou racionálními čísly – např.

$$x(t) = A_1 \sin(2t + \psi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}t + \psi_2)$$

Protože každé iracionální číslo je možno přibližně nahradit blízkým racionálním číslem, jedná se zde tedy o přibližnou periodicitu – se základní periodou (obecně) nekonečně dlouhou.

### D-2.3.2 Přechodové procesy

Přechodové procesy se mohou vztahovat k různým fyzikálním jevům. Tak např. (obr. 8)




Obr. 8

a) $x(t) = A \cdot \exp(-at)$ pro $t \geq 0$

$x(t) = 0$ pro $t < 0$

b) $x(t) = A \cdot \exp(-at) \cdot \cos bt$ pro $t \geq 0$

$x(t) = 0$ pro $t < 0$

c) $x(t) = A$ pro $0 \leq t \leq c$

$x = 0$ pro $0 > t > c$

Typickou vlastností přechodových procesů je krátká doba trvání. Charakteristickým rysem – ve srovnání s dosud uvedenými procesy – je, že nemají diskrétní, ale spojité frekvenční spektrum.

# D-3 Stochastické procesy

Využití teorie náhodných procesů v oblasti dynamiky, pevnosti a životnosti konstrukcí je zvláště významné, neboť převážná většina veličin, které se zde uplatňují má náhodný charakter. To se týká především procesů zatížení a odezvy na toto zatížení. Rovněž náhodný charakter ve struktuře a složení materiálu vyžaduje statistický přístup při hodnocení výchozích charakteristik únosnosti materiálu. Ale též proces nukleace a růstu únavových trhlin má stochastický charakter - a to i při deterministickém (např. harmonickém) zatěžování.

## D-3.1 Základní pojmy

Klasická teorie pravděpodobnosti studuje vlastnosti náhodně proměnných; v rámci pokusu nabývá tato proměnná předem neznámou jedinou hodnotu. Náhodný jev je „statický“.

V praxi se ale často setkáváme s proměnnými, které se v průběhu pokusu (tedy v závislosti na čase) mění (obvykle spojitě). Výsledkem náhodného pokusu je potom časová funkce, která nabývá náhodných hodnot. Náhodný proces potom můžeme charakterizovat jako množinu možných rozdílných funkcí času, tzv. ***realizací*** náhodného procesu. U náhodného procesu je čas *t* spojitý parametr; nabývá-li pouze diskrétnách hodnot, mluvíme o náhodné posloupnosti.

## D-3.2 Charakteristiky souboru realizací

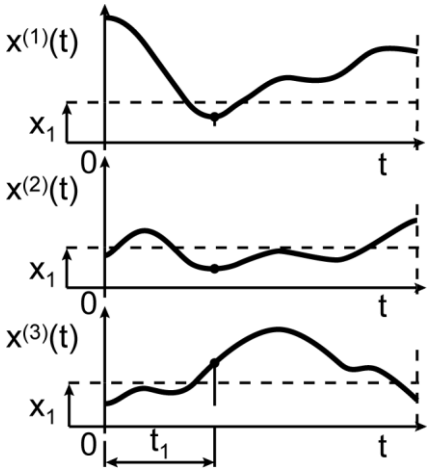
Uvažujme řez stochastickým procesem X(t) v čase $t = t_1$ (obr. 9).

Potom je možno definovat pravděpodobnost

$$P\left[ X\left(t_1\right) \le x_1 \right] = F\left(x_1, t_1\right)$$

Tato funkce dvou proměnných $x_1$ , $t_1$ se nazývá jednorozměrná distribuční funkce. Z ní plyne jednorozměrná hustota pravděpodobnosti

$$f\left(x_1, t_1\right) = \frac{\partial F\left(x_1, t_1\right)}{\partial x_1}$$




Obr. 9

Dále je možno definovat první pravděpodobnostní element náhodného procesu, který vyjadřuje pravděpodobnost $f\left(x_1, t_1\right)dx_1$ , že náhodná veličina $X\left(t_1\right)$ leží v nekonečně malém intervalu mezi $x_1$ a $x_1 + dx_1$ pro hodnotu parametru $t = t_1$.

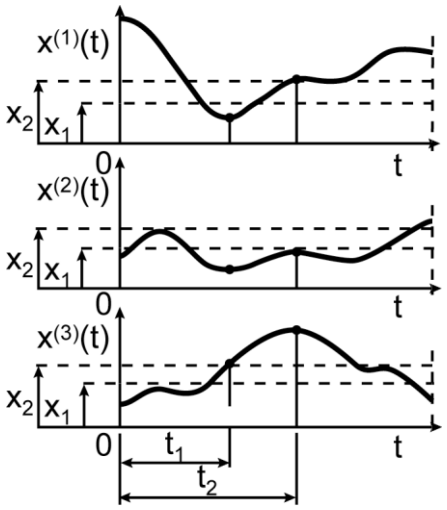
Uvedené charakteristiky popisují náhodný proces pouze v jediném časovém okamžiku. Ani zvětšený počet těchto okamžiků mepřispívá výraznhě k dokonalejšímu poznání procesu.

Pro získání představy o vývoji procesu v čase je vhodné zabývat se charakteristikami vztahujícími se ke dvěma hodnotám parametru *t* (obr. 10). Dvojrozměrná distribuční funkce (distribuční funkce druhého řádu) je pak definována

$$P\left[ x\left(t_1\right) \le x_1; x\left(t_2\right) \le x_2 \right] = F\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right)$$

Analogicky jako v předchozím též existuje dvojrozměrná hustota pravděpodobnosti

$$f\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right) = \frac{\partial^2 F\left(x_1, t_1; x_2, t_2\right)}{\partial x_1 \partial x_2}$$




Obr. 10

Podobně by bylo možno postupovat k dalším, vícerozměrnějším charakteristikám.

Rozdělení pravděpodobnosti též určují číselné charakteristiky – **momenty**.

Z jediného řezu náhodným procesem *X(t)* v čase *t* je možno určit:

a) obecný moment s-tého řádu definovaný vztahem

$$m_s\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x,t)\,dx$$

Z nich nejdůležitější je obecný moment prvního řádu – **střední hodnota** náhodného procesu v čase *t*

$$m_1\left[x(t)\right] = a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t)\,dx$$

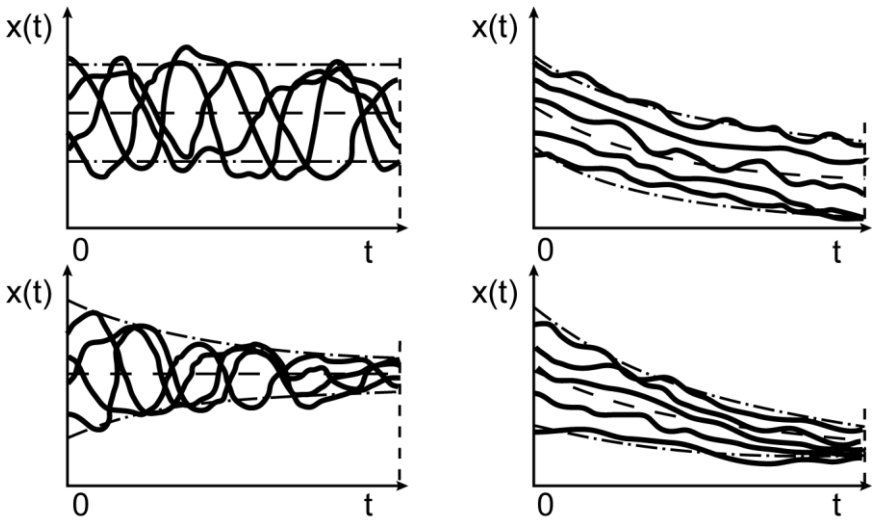
b) centrální moment s-tého řádu

$$\mu_s\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - a(t)\right]^s f(x,t)\,dx$$

Z nich nejvýznamnější je centrální moment druhého řádu – **rozptyl** (disperze) náhod;ného procesu v čase *t*

$$\mu_2\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - a(t)\right]^2 f(x,t)\,dx$$

Na obr. 11 jsou uvedeny ukázky náhodných procesů, z nichž je zřejmé, že jak střední hodnota tak ani rozptyl nepostihují vnitřní stav procesů. K tomuto napomáhají momenty získané ze dvou řezů v časových okamžicích $t_1$ a $t_2$ a to:




Obr. 11

a) smíšený obecný moment druhého řádu systému dvou náhodných proměnných $X(t_1)$ a $X(t_2)$ - **korelační funkce**, daná vztahem

$$R_{xx}(t_1,t_2) = m_1\left[x(t_1)\cdot x(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1 dx_2$$

b) smíšený centrální moment druhého řádu systému dvou náhodných proměnných $X(t_1)$ a $X(t_2)$ - **kovarianční funkce**, pro níž platí

$$K_{xx}(t_1,t_2) = m_1\left\{\left[x(t_1)-a(t_1)\right]\cdot\left[x(t_2)-a(t_2)\right]\right\}$$

$$K_{xx}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x_1-a(t_1)\right]\left[x_2-a(t_2)\right] f(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1 dx_2$$

Pro $t_1 = t_2 = t$ je

$$R_{xx}(t,t) = m_2\left[x(t)\right]$$

$$K_{xx}(t,t) = \mu_2\left[x(t)\right] = m_2\left[x(t)\right] - m_1^2\left[x(t)\right]$$

Poznámka

Ta část teorie náhodných procesů, která využívá jen momentů prvých dvou řádů, se nazývá **korelační teorie náhodných procesů.** V rámci korelační teorie není třeba znát hustotu pravděpodobnosti vyšší než dvourozměrnou. Je však zřejmé, že dvourozměrné rozdělení ani korelační funkce nemohou popsat náhodný proces tak podrobně jako vícerozměrné rozdělení. Mimo to mohou různým procesům odpovídat stejné korelační funkce, neboť rovnost korelačních funkcí ještě neznamená identitu procesů. Do dnešní doby je však rozpracována pouze korelační teorie do té míry, že ji lze využívat v inženýrských aplikacích. Proto také další výklad bude probíhat v rámci korelační teorie (neboli náhodných procesů druhého řádu).

## D-4 Stacionární náhodné procesy

### D-4.1 Pojem stacionarity

Užší kategorií náhodných procesů jsou stacionární procesy. Podmínku stacionarity je možno klást různě:

a) za stacionární náhodný proces se považuje takový proces, jehož hustoty pravděpodobnosti libovolného řádu (tj. prvého, druhého atd. až n-tého) se nemění při změně počátku, od něhož počítáme čas. Tak např. pro n-tý řád

$$f\left(x_1,x_2,....x_n;t_1,t_2,...t_n\right)=f\left(x_1,x_2,...x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,...t_n+\tau\right)$$

Tyto hustoty pravděpodobnosti jsou tedy časově invariantní.
Procesy splňující tuto podmínku se nazývají **stacionární v úzkém smyslu** nebo též **silně (striktně) stacionární**.

b) za stacionární stochastický proces se považuje takový proces, jehož jednorozměrné a dvourozměrné hustoty pravděpodobnosti jsou časově invariantní (hustoty pravděpodobnosti vyšších řádů mohou být časově závislé). Takového procesy se nazývají **stacionární v širším smyslu** nebo **slabě stacionární** nebo též stacionární procesy druhého řádu. Těmito procesy se budeme v dalším zabývat, neboť se vztahují na oblast platnosti korelační teorie.

Je tedy u nich:

- jednorozměrná hustota pravděpodobnosti nezávislá na argumentu *t*,
- dvourozměrná hustota pravděpodobnosti je kromě argumentů $x_1$ a $x_2$ funkcí pouze rozdílu proměnných $t_2-t_1=\tau$ , tj. funkcí pouze jedné další spojité proměnné.

Praktický význam korelační teorie stacionárních náhodných procesů je zdůrazněn ještě tou skutečností, že největší třída stacionárních náhodných procesů – normální (gaussovy) procesy – jsou úplně definovány pouze korelační fukcí.

### D-4.2 Charakteristiky stacionárních procesů druhého řádu

Střední hodnota a rozptyl stacionárního procesu jsou v čase konstantní:

$$m_1\left[x(t)\right]=a=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)dx$$

$$\mu_2\left[x(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-a\right]^2\,f\left(x\right)dx=m_2\left[x(t)\right]-a^2$$

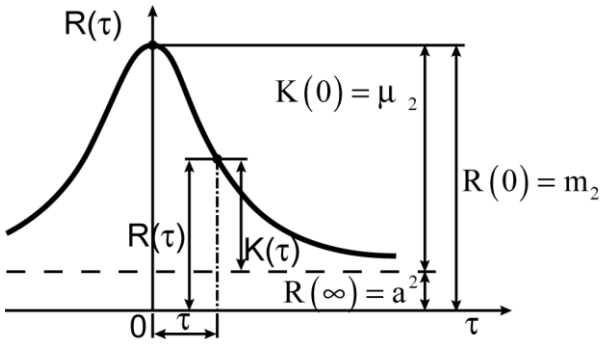
Korelační a kovarianční funkce (a to jak auto- tak i vzájemné) jsou funkcemi časové diference (zpoždění) $\tau=t_2-t_1$:

$$R(\tau)=m_1\left[x(t)\cdot x(t+\tau)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot x_\tau\cdot f\left(x,x_\tau,\tau\right)dxdx_\tau$$

$$K(\tau)=m_1\left\{\left[x(t)-a\right]\cdot\left[x(t+\tau)-a\right]\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)(x_\tau-a)\,f\left(x,x_\tau,\tau\right)dxdx_\tau$$

přičemž platí (obr. 12)

$$K(\tau) = R(\tau) - a^2$$




Obr. 12

Odchylky procesu od jeho střední hodnoty, tj. $X(t) - a$, se též nazývají fluktuacemi procesu. O kovarianční funkci je potom možno hovořit jako o korelační funkci fluktuací.

Na obr. 12 jsou naznačeny některé další vlastnosti korelační funkce:

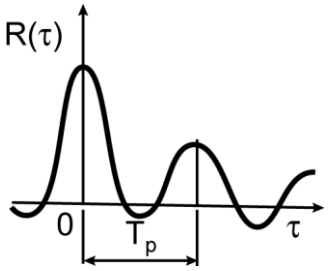
$$\lim_{\tau \to 0} R(\tau) = R(0) = m_2$$

$$\lim_{\tau \to \infty} R(\tau) = R(\infty) = a^2$$

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

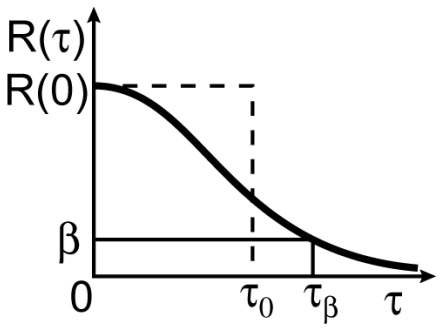
$$R(0) > R(\tau)$$

Jestliže obsahuje stacionární proces periodickou složku, projeví se to charakteristickým způsobem na průběhu korelační funkce: lze na něm odečíst periodu této periodické složky (obr. 13), které jsou nenulové i pro $\tau \to \infty$.




Obr. 13

Na obr. 12 je patrný pokles $R(\tau)$ k $a^2$ a $K(\tau)$ k nule pro $\tau \to \infty$. Prakticky je však možno hovořit o nekorelovatelnosti náhodných proměnných ze dvou řezů, jestliže je časový rozdíl $\tau$ dostatečně velký. Tato doba se potom nazývá **interval korelace** (obr. 14).




Obr. 14

Interval korelace je definován

a) buď jako doba $\tau_\beta$, při níž hodnota korelační funkce poklesne pod zvolenou hodnotu $\beta$, tj. $R(\tau) < \beta$,

b) nebo jako délka $\tau_0$ obdélníka s výškou $R(0)$, jehož plocha je rovna ploše pod křivkou $R(\tau)$ pro $\tau \to \infty$:

$$\tau_0 = \frac{1}{R(0)} \int_0^\infty R(\tau)\, d\tau$$

O některých dalších vlastnostech korelační funkce je pojednáno v následující kapitole o ergodických procesech.

Ukažme si nyní na několika příkladech tvar autokorelační (resp. autokovarianční) funkce procesu obsahujícího periodickou složku.

**Příklad 3**

Je dána funkce náhodného procesu

$$x(t) = A\sin(\omega t + \psi)$$

kde

$A, \omega$ jsou deterministické veličiny (kladné hodnoty)

$\psi$ je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0, 2\pi)$.

Jedná se o stacionární proces?

Řešení.

Střední hodnota procesu je

$$m_1[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}$$

Potom dostaneme

$$m_1\left[x(t)\right] = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\omega t + \psi)\, d\psi = 0$$

Je tedy střední hodnota konstantní, nezávislá na čase – proces je potom stacionární ve střední hodnotě.

Autokorelační funkce

$$R(t_1, t_2) = m_1\left[x(t_1)\cdot x(t_2)\right]$$

V našem případě

$$x(t_1) = x(t) = A\sin(\omega t + \psi)$$

$$x(t_2) = x(t+\tau) = A\sin\left[\omega(t+\tau) + \psi\right]$$

$$R(t_1, t_2) = R(t, t+\tau) = K(t_1, t_2) = K(t, t+\tau)$$

takže

$$K(t, t+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cdot x(t+\tau)\, d\psi = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) = K(\tau)$$

Rozptyl

$$\sigma_x^2 = K(0) = \frac{A^2}{2}$$

je rovněž na čase nezávislý.

Jedná se tedy o stacionární proces.

**Příklad 4**

Uvažujme náhodnou funkci harmonického kmitání

$$x(t) = A\cos(\omega t + \psi)$$

kde

$\omega, t$ jsou konstanty

$A$ je náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(A)$.

Jedná se o stacionární proces?

Řešení.

Střední hodnota procesu je definována

$$m_1\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

V našem případě je

$$m_1\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega t + \psi)\cdot f(A)dA = \cos(\omega t + \psi)\int_{-\infty}^{\infty} A\cdot f(A)dA$$

Po integraci

$$m_1\left[x(t)\right] = \cos(\omega t + \psi)\cdot m_1(A)$$

Střední hodnota je závislá na čase, jedná se tedy o nestacionární proces.

**Příklad 5**

V náhodné funkci harmonického kmitání

$$x(t) = A\cos(\omega t + \psi)$$

je

$\omega$ konstantou,

$A,\ \psi$ jsou náhodné veličiny $A \geq 0,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Předpokládejte, že fázový posuv $\psi$ nezávisí na amplitudě $A$ a má v daném intervalu rovnoměrné rozdělení.

Je tato funkce stacionární?

Řešení.

Jak plyne ze zadání, je tato funkce popsána dvourozměrnou hustotou pravděpodobnosti

$$f(A,\psi) = \frac{1}{2\pi}\cdot f(A)$$

Střední hodnota procesu je

$$m_1\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$$

Po dosazení a integraci

$$m_1\left[x(t)\right] = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} A\cos(\omega t + \psi)\cdot\frac{1}{2\pi} f(A)d\psi dA = 0$$

Proces je stacionární ve střední hodnotě.

Autokorelační funkce je v tomto případě pak rovna autokovarianční funkci, neboť se jedná o centrovaný proces (střední hodnota je nulová). Potom je

$$K(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$K(t_1,t_2) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} A\cos(\omega t_1 + \psi)A\cos(\omega t_2 + \psi)\frac{1}{2\pi} f(A)dAd\psi$$

$$K(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}A^2 f(A)dA\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\psi)\cos(\omega t_2+\psi)d\psi$$

$$K(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi}m_2(A)\cdot\pi\cdot\cos\left[\omega(t_1-t_2)\right]=\frac{1}{2}\sigma_A^2\cdot\cos(\omega\tau)=K_{xx}(\tau)$$

Autokovarianční funkce rovněž nezávisí na čase.

Jedná se tedy o stacionární proces. Rozptyl procesu je

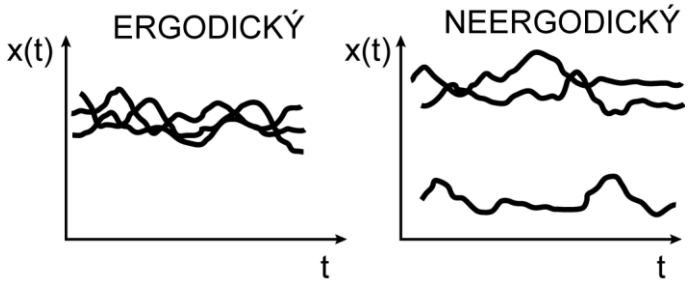
$$\sigma_x^2=K(0)=\frac{1}{2}\sigma_A^2$$

## D-5 Ergodické náhodné procesy

### D-5.1 Pojem ergodicita procesu

Ergodické procesy jsou významnou podskupinou stacionárních procesů.

Zjednodušeně je možno říci, že proces je ergodický, jestliže každá samostatná realizace náhodné funkce se jeví jako „zplnomocněný představitel“ celého souhrnu možných realizací. Jedna realizace při dostatečné délce může při zpracování nahradit množinu realizací téže délky (tak je tomu na obr. 15a, nikoliv však na obr. 15b).



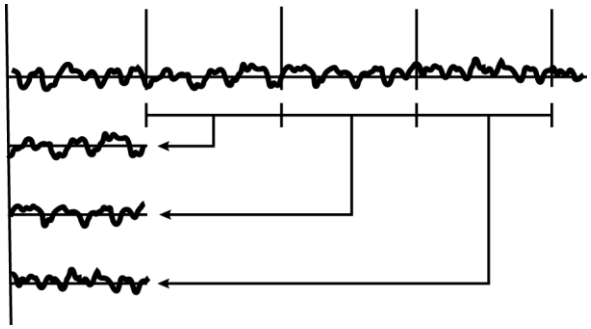

Obr. 15

Podle přesnější definice nazýváme náhodný proces ergodickým, jestliže každou statistickou charakteristiku, kterou jsme získali jako střední hodnotu na množině možných realizací, můžeme (s pravděpodobností blízkou jedné) získat z jediné realizace náhodného procesu za dostatečně dlouhý časový interval. V tomto případě se jedná o **striktně (silně) ergodický** proces. Pokud se uvedené vlastnosti vztahují pouze na střední hodnotu a korelační (nebo kovarianční) funkci, jedná se o proces **slabě ergodický (ergodický v širším smyslu).**

Ergodicita a stacionarita náhodného procesu jsou dvě nezávislé vlastnosti. Nutnou podmínkou ergodicity je stacionarita; není to však podmínka postačující.

Prakticky je náhodný proces ergodický (v širším smyslu), když je stacionární v širším smyslu a jeho střední hodnota v čase (časová střední hodnota) a korelační funkce v čase (časová korelační funkce) jsou pro všechny realizace stejné. Výsledky rozborů ukazují, že převážnou většinu procesů je možno pokládat za ergodické.

Při řešení konkrétní úlohy však předem obvykle nevíme, zda vyšetřovaný proces vyhovuje podmínkce stacionarity a jsme-li tedy oprávněni použít vztahy založené na ergodických vlastnostech. Potom se často postupuje následujícím způsobem (obr. 16):



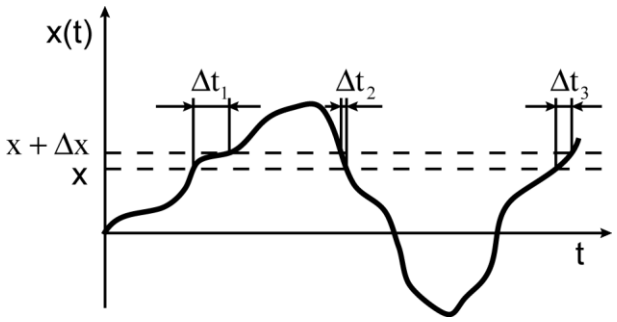
Obr. 16

1. předpokládáme stacionárnost a ergodičnost analyzovaného procesu,
2. rozdělíme celý záznam na několik dílčích souborů,
3. každý soubor považujeme za ergodický a vyhodnotíme jejich charakteristiky,
4. jsou-li rozdíly středních hodnot a rozptylů u jednotlivých souborů statisticky nevýznamné, jedná se o stacionární proces a u něhu uszujeme na oprávněnost ergodicity. Ukáže-li se, že se jedná o nestacionární proces, je nutno použít zvláštních vyhodnocovacích postupů.

## D-5.2 Hustota pravděpodobnosti

Hustota pravděpodobnosti náhodného procesu udává pravděpodobnost, s níž lze předpokládat, že hodnota tohoto procesu leží v určitém intervalu a to v libovolném časovém okamžiku.

Uvažujme záznam realizace procesu (obr. 17).




Obr. 17.

Potom pravděpodobnost, že $x(t)$ bude ležet v mezích od $x$ do $(x+\Delta x)$ je dána poměrem $T_x / T$, kde $T_x$ je součet $T_x = \sum t_i$, tj. celková doba, v níž $x(t)$ je v intervalu $(x, x+\Delta x)$ po celou dobu měření $T_i$:

$$P\left[x < x(t) \le x + \Delta x\right] = lim_{T\to\infty} \frac{T_x}{T}$$

Hustota pravděpodobnosti potom je

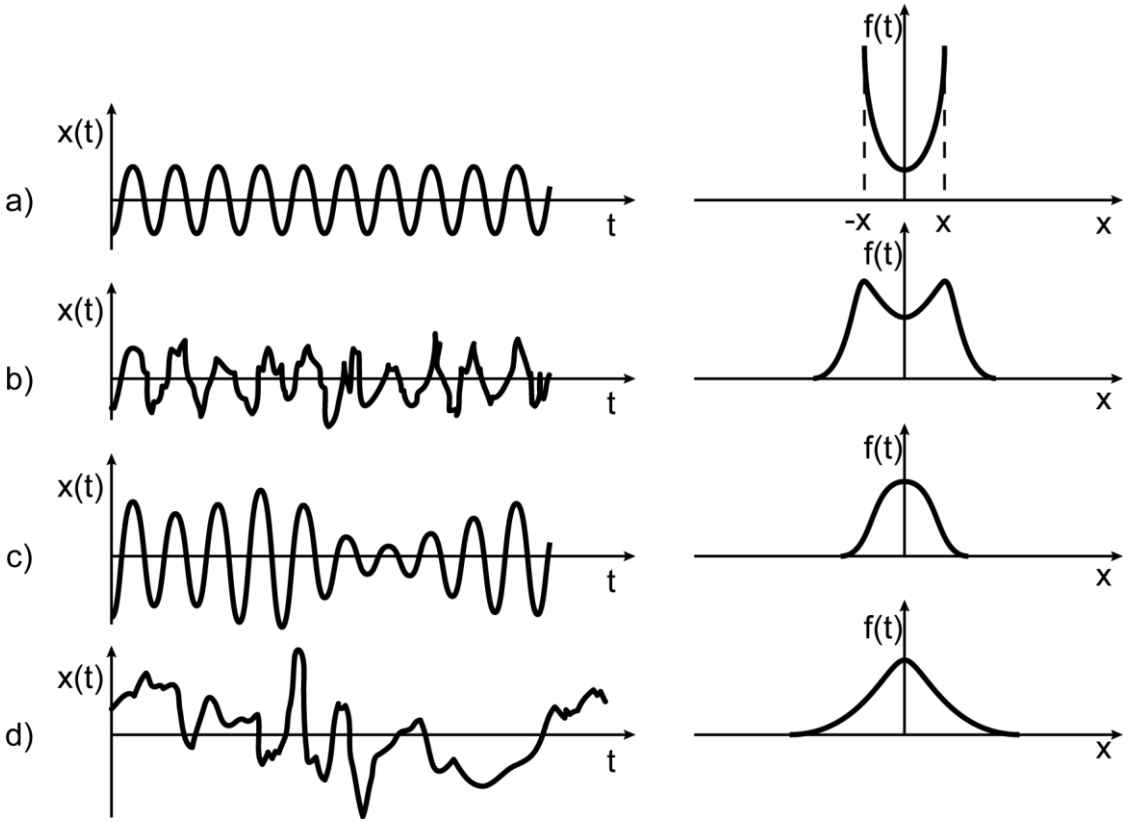
$$f(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left[x < x(t) \le x + \Delta x\right]}{\Delta x}$$

Pro malé $\Delta x$ je

$$f(x) = \frac{1}{\Delta x}\left[\lim_{T \to \infty} \frac{T_x}{T}\right]$$

Na obr. 18 jsou ukázány některé příklady procesů a jim odpovídající hustoty pravděpodobnosti:

a) harmonický proces,
b) harmonický proces se superponovaným náhodným šumem,
c) úzkopásmový náhodný proces,
d) širokopásmový náhodný proces




Obr. 18

Analyticky je možno popsat hustotu pravděpodobnosti harmonického procesu

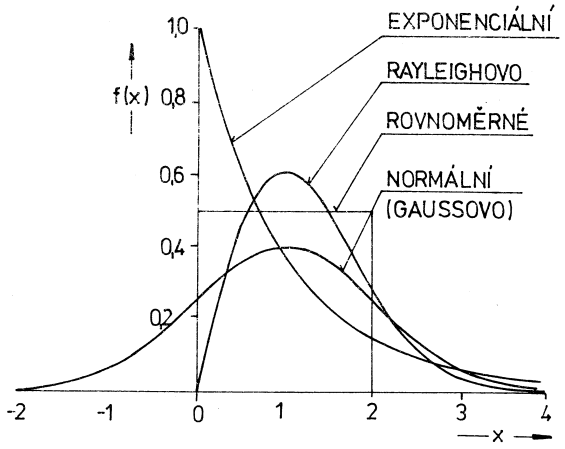
$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{X^2 - x^2}} \qquad \text{pro } |x| < X$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{pro } |x| \ge X$$

Hustota pravděpodobnosti náhodných procesů (obr. 18 c, d) odpovídá velmi často Gaussovu rozdělení, pro něž platí

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left( -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Příklady některých dalších, často se vyskytujících rozdělení, jsou uvedeny na obr.19.




Obr. 19

Hustota pravděpodobnosti pro Rayleighovo rizdělení je

$$f(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} \cdot \exp\left( -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right) \qquad \text{pro } x \geq 0$$

Pro exponenciální rozdělení platí

$$f(x) = c \cdot \exp(-cx) \qquad \text{pro } x \geq 0$$

**Příklad 6**

Určete hustotu pravděpodobnosti harmonického kmitání

$$x(t) = A\sin(\omega t + \psi)$$

kde

$A$, $\omega$ jsou konstanty

$\psi$ je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením v intervalu $(0,\ 2\pi)$

Řešení

Hustota pravděpodobnosti fázového úhlu je tedy

$$f(\psi) = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{pro } 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

$$f(\psi) = 0 \qquad \text{pro jiné } \psi$$

Lze ji vyjádřit jako

$$f(\psi) = \frac{P\left[\psi < \psi(x) \leq \psi + \Delta\psi\right]}{\Delta\psi}$$

Pro hustotu pravděpodobnosti funkce $x(t)$ platí

$$f(x) = \frac{P\left[x < x(\psi) \le x + \Delta x\right]}{\Delta x}$$

Protože funkce $\psi(x)$ je dvouznačná, platí

$$f(x) = \frac{2P\left[\psi < \psi(x) \le \psi + \Delta\psi\right]}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta\psi}{\Delta\psi}$$

Z toho plyne

$$f(x) = 2f(\psi)\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = 2f(\psi)\frac{d\psi}{dx} = \frac{2f(\psi)}{\frac{dx}{d\psi}}$$

pro $\frac{dx}{d\psi} \neq 0$.

Derivací

$$\frac{dx}{d\psi} = A\cos(\omega t + \psi) = A\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \psi)} = \sqrt{A^2 - x^2}$$

Potom

$$f(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\pi}}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

pro $|x| < A$.

Pro $|x| > A$ je $f(x) = 0$.

## D-5.3 Časové hodnoty momentů

Budou zde uvedeny pouze ty nejužívanější. Pro rozlišení od charakteristik souboru realizací budou časové charakteristiky jedné realizace označeny vlnovkou.

První obecný moment v čase (časová střední hodnota) je definována vztahem

$$\tilde{m}_1\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

Tuto hodnotu je možno chápat jako stejnosměrnou složku průběhu $x(t)$. U ergodických procesů platí

$$\tilde{m}_1\left[x(t)\right] = m_1\left[x(t)\right] = a = \bar{x}$$

Druhý obecný moment v čase je

$$\tilde{m}_2\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^\infty \left[x(t)\right]^2 dt$$

Z něho plyne efektivní hodnota

$$x_{\text{ef}} = +\sqrt{\tilde{m}_2\left[x(t)\right]}$$

Pro ergodické procesy je

$$\tilde{m}_2\left[X(t)\right] = m_2\left[X(t)\right] = \psi_x^2$$

Časový rozptyl (druhý centrální moment v čase)

$$\tilde{\mu}_2\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t) - \bar{x}\right]^2 dt$$

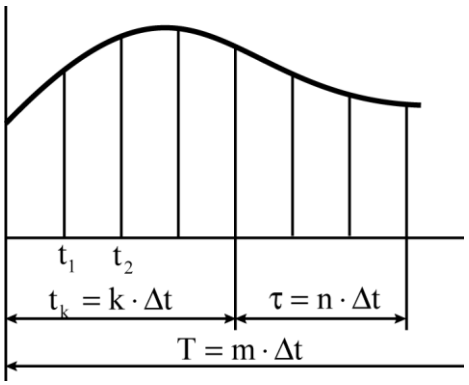
Pro ergodické procesy platí

$$\tilde{\mu}_2\left[x(t)\right] = \mu_2\left[x(t)\right] = \sigma_x^2 = \psi_x^2 - a^2$$

Velikosti těchto momentů jsou navzájem vázány vztahem

$$\tilde{\mu}_2\left[x(t)\right] = \tilde{m}_2\left[x(t)\right] - \tilde{m}_1^2\left[x(t)\right]$$

Při praktickém zpracování náhodných procesů na počítači je spojitý průběh nahrazen diskrétními hodnotami, získanými vzorkováním v časových okamžicích $t_k$ , kde $k = 1, 2, \ldots m$ (obr. 20 ).



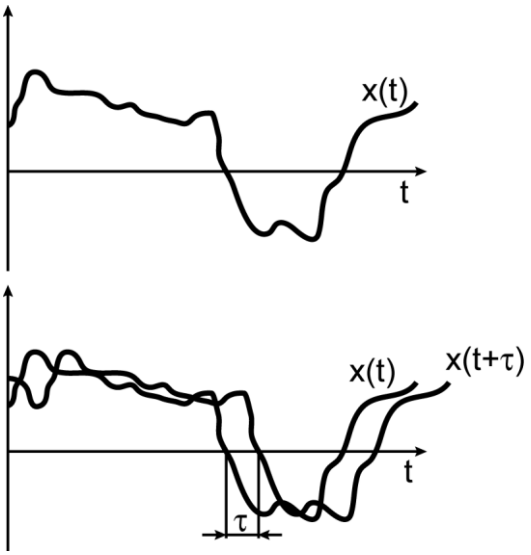

Obr. 20

## D-5.4 Časová autokorelační a autokovarianční funkce

Časová autokorelační funkce je definována vztahem

$$\tilde{R}_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)\,dt$$

Geometrický význam této funkce je znázorněn na obr. 21, kde je vedle průběhu realizace $x(t)$ nakreslen též její průběh posunutý o časový interval $\tau$ .




Obr. 21

Obě křivky se od sebe více (vpravo) nebo méně (vlevo) liší, Mírou jejich rozdílu vlivem časového posunutí $\tau$ je plocha pod novou křivkou, vzniklou součinem $x(t)\cdot x(t+\tau)$; výška obdélníka o stejné ploše odpovídá časové korelační funkci.

Korelační a kovarianční funkce tak udávají míru „podobnosti“ mezi dvěma časovými průběhy jako funkci časového posunutí (vzájemná korelace) nebo míru s níž funkce koreluje sama se sebou jako funkce časového zpoždění (autokorelace).

U ergodických procesů je

$$\tilde{R}_{\mathrm{xx}}(\tau) = R_{\mathrm{xx}}(\tau)$$

Při určování autokorelační funkce z navzorkovaných hodnot se vychází z výrazu

$$R_{\mathrm{xx}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{m-n} \sum_{k=1}^{m-n} \left[ x(t_{\mathrm{k}})\cdot x(t_{\mathrm{k}}+\tau) \right]$$

Požadavek nekonečného časového intervalu $T$ není ovšem prakticky splnitelný; je však třeba, aby tento interval byl dostatečně dlouhý. To je jedn z nezbytných předpokladů dosažení téměř stejných výsledků při opakovaném měření za stejných podmínek.

Obdobně platí pro autokovarianční funkci u centrovaných procesů

$$\tilde{K}_{\mathrm{xx}}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ x(t)-a \right].\left[ x(t+\tau)-a \right] dt = K_{\mathrm{xx}}(\tau) = \tilde{R}_{\mathrm{xx}}(\tau) - a^2$$

Odchylky procesu od jeho střední hodnoty se nazývají fluktuacemi procesu. O autokovarianční funkci je pak možno hovořit jako o korelační funkci fluktuací.

Jestliže k náhodné funkci $x(t)$ přičteme deterministickou funkci $\xi(t)$, získáme náhodnou funkci

$$y(t) = x(t) + \xi(t)$$

Pro autokovarianční funkci pak platí

$$K_{\mathrm{yy}}(\tau) = K_{\mathrm{xx}}(\tau)$$

To plyne přímo z definice $K(\tau)$, neboť v tomto případě

$$x(t)-m_1\left[x(t)\right]=y(t)-m_1\left[y(t)\right]$$

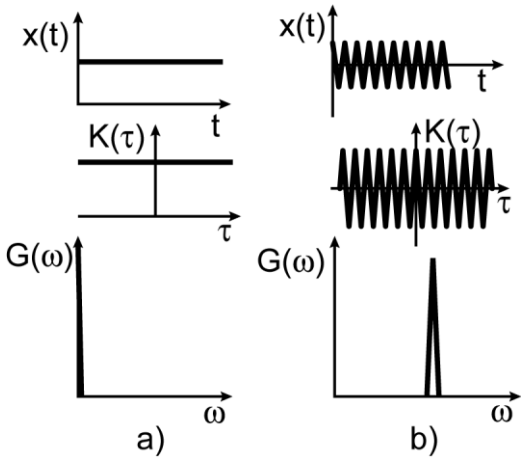
Pro vzájemné porovnání stacionárních procesů se používá normovaná autokorelační funkce (součinitel autokorelace)

$$\rho_{xx}(\tau)=\frac{R_{xx}(\tau)}{m_2\left[x(t)\right]}=\frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)}$$

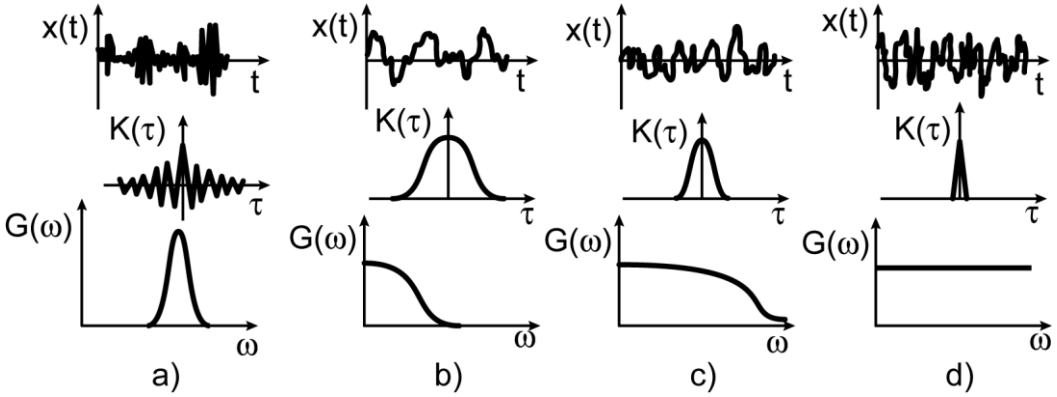
pro níž platí

$$\rho_{xx}(0)=1 \qquad \rho_{xx}(-\tau)=\rho_{xx}(\tau) \qquad \rho_{xx}(\tau)\le 1$$

Příklady autokorelačních funkcí deterministických procesů jsou uvedeny na obr. 22. Zde je: a) konstantní funkce, b) harmonický proces.




Obr. 22




Obr. 23

Na obr. 23 jsou potom ukázky stacionárních náhodných procesů:.

a) úzkopásmový proces,
b) náhodný proces s frekvenčním omezením střední velikosti,

c) širokopásmový proces,
d) teoretický „bílý šum“

Závěrem tedy můžeme shrnout technický význam určování korelační funkce:

1. informuje nás o frekvenčních složkách procesu; názorněji však tuto službu poskytne průběh výkonové spektrální hustoty. Dříve se výkonová spektrální hustota získávala Fourierovou transformací korelační funkce;
2. normovaná autokorelační (nebo autokovarianční) funkce umožňuje porovnání dvou nebo více náhodných procesů vzhledem k typu korelační funkce;
3. autokorelační funkce umožňuje analyzovat náhodné procesy obsahující periodické složky.

## Příklad 7

Je náhodný proces z příkladu 3 též egodický?

Řešení
Časová střední hodnota

$$\tilde{m}_1\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t+\psi)\,dt$$

Po integraci

$$\tilde{m}_1\left[x(t)\right] = 0 = m_1\left[x(t)\right]$$

Náhodná funkce je tedy ergodická vzhledem ke střední hodnotě.

Autokovarianční časová funkce je

$$\tilde{K}_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t+\psi)\cdot A\cos\left[\omega(t+\tau)+\psi\right]dt$$

Po integraci

$$\tilde{K}_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) = K_{xx}(\tau)$$

Náhodná funkce je ergodická i vzhledem k autokorelační funkci.

**Příklad 8**

Jedná se v příkladu 5 též o ergodický proces?

Řešení
Časová střední hodnota je

$$\tilde{m}_1\left[x(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t+\psi)\,dt = 0$$

Náhodná funkce je ergodická vzhledem ke střední hodnotě neboť je

$$m_1\left[x(t)\right] = \tilde{m}_1\left[x(t)\right]$$

Autokovarianční funkce byla určena v příkladu 7 a je

$$\tilde{K}_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

Funkce není ergodická vzhledem ke korelační funkci, neboť je

$$K_{xx}(\tau)=\frac{1}{2}\sigma_A^2\cos(\omega\tau)$$

a tedy

$$K_{xx}(\tau)\neq\tilde{K}_{xx}(\tau)$$

**Příklad 9**

V praxi se často vyskytuje stacionární proces typu

$$x(t)=x_1(t)+A\cos(\omega t+\psi)$$

kterýje složen z harmonického procesu (majícího konstantní $A,\ \omega$, na němž je superponován šum představovaný náhodným procesem $x_1(t)$, jehož střední hodnota je nulová a auokovarianční funkce je

$$\tilde{K}_{xx}(\tau)=\sigma_1^2\cdot\exp(-\alpha|\tau|)$$

Jaký tvar bude mít autokovarianční funkce procesu $x(t)$? (Procesy jsou nekoherentní.)

## Řešení

**Autokovarianční funkce harmonického procesu byla určena v příkladu 7 ve tvaru**

$$\tilde{K}_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

**Autokovarianční funkce procesu $x(t)$ je**

$$K_{xx}(\tau)=K_{xx}^{(1)}(\tau)+K_{xx}^{(2)}(\tau)=\sigma_1^2\cdot\exp(-\alpha|\tau|)+\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

Hodnota autokovarianční funkce šumu klesá k nule a pro dostatečně velké $\tau$ ji lze zanedbat. Potom je prakticky

$$K_{xx}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

Z této funkce je pak možno určit úhlovou frekvenci $\omega$, amplitudu $A$ a rozptyl harmonického procesu

$$\sigma_A^2=K_{xx}(0)=\frac{A^2}{2}$$

## D-5.5 Výkonová spektrální hustota (VSH)

Tato charakteristika popisuje náhodný proces ve frekvenční oblasti. (U dvou náhodných procesů to je potom vzájemná výkonová spektrální hustota.)

### D-5.5.1 Fyzikální představa VSH

Uvažujme ergodický centrovaný proces v intervalu $(0,T)$. Jeho kovarianční funkce $K_{xx}(\tau)$ je sudá funkce s periodou $T=2\pi/\omega$. V intervalu $(0,T)$ji rozvineme do Fourierovy řady

$$K_{xx}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k . \cos(\omega_k \tau)$$

kde (pro $k = 0,\ 1,\ 2$ atd.)

$$\omega_k = k \cdot \omega = k \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^T K_{xx}(\tau) . \cos(\omega_k \tau) d\tau$$

nebo též (pro $k$ = 0, ± 1, ± 2 atd.)

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} K_{xx}(\tau) . \cos(\omega_k \tau) d\tau$$

Tento výraz využijeme v dalším.

Pro $\tau = 0$ je

$$K_{xx}(\tau) = K_{xx}(0) = \mu_2[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$$

Tedy celkový rozptyl stacionárního náhodného procesu je roven součtu dílčích rozptylů $D_k$ způsobených úhlovými frekvencemi $\omega_k$ pro $k = 1,\ 2.\ 3\ ...$

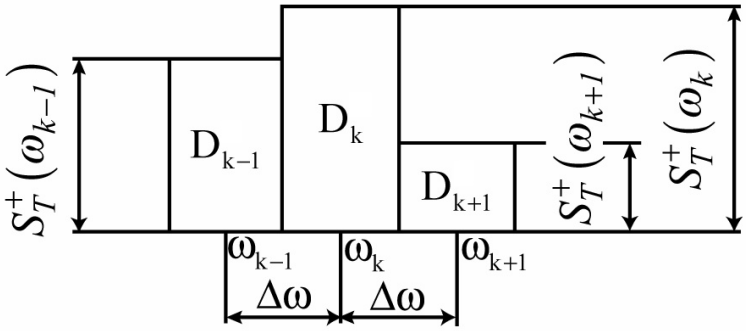
Vzdálenost mezi jednotlivými frekvencemi je

$$\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = 2\pi \cdot \Delta f = \frac{2\pi}{T}$$

To též znamená, že $D_k$ je rozptyl tvořený frekvencemi v intervalu $\langle \omega_k - \Delta\omega / 2, \omega_k + \Delta\omega / 2 \rangle$. Čím bude $T$ větší, tím bude $\Delta\omega$ menší a tím jemnější bude rozklad celkového rozptylu procesu vzhledem k frekvencím.

Vytvoříme podíly (obr. 24)

$$\frac{D_k}{\Delta\omega} = S_T^+(\omega_k)$$




Obr. 24.

Potom

$$D_{\mathrm{k}} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} K_{\mathrm{xx}}(\tau).\cos(\omega_{\mathrm{k}}\tau)\,d\tau = S_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}}).\Delta\omega = S_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}})\cdot\frac{2\pi}{T}$$

a z toho

$$S_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} K_{\mathrm{xx}}(\tau).\cos(\omega_{\mathrm{k}}\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T} K_{\mathrm{xx}}(\tau).\cos(\omega_{\mathrm{k}}\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}G_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}})$$

Je tedy

$$G_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{T} K_{\mathrm{xx}}(\tau).cos(\omega_{\mathrm{k}}\tau)\,d\tau$$

$G_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}})$ je rozpojitá funkce výkonové spektrální hustoty pro $k = 1,\ 2,\ 3$ ... atd.

Pro jednotlivá $k$ (a tedy odpovídající úhlové frekvence) lze určit hodnoty funkce $G_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}})$ a jim příslušné rozptyly. Tyto dílčí rozptyly $D_{\mathrm{k}}$ jsou způsobeny úhlovými frekvencemi, které leží v intervalech $\omega_{\mathrm{k}} - \Delta\omega/2,\ \omega_{\mathrm{k}} + \Delta\omega/2$.

Uvážíme dále, že pro rozptyl harmonického procesu (s amplitudou $A$) platí

$$\mu_2\left[x(t)\right] = \frac{A^2}{2} \qquad\qquad A = \sqrt{2.\mu_2\left[x(t)\right]}$$

a tedy též

$$A_{\mathrm{k}} = \sqrt{2D_{\mathrm{k}}} = \sqrt{2G_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}}).\Delta\omega}$$

což je amplituda harmonického procesu $A_{\mathrm{k}}\cdot\sin(\omega_{\mathrm{k}}t + \psi_{\mathrm{k}})$, který lze přiřadit ke každému frekvenčnímu intervalu, přičemž rozptyly tohoto harmonického procesu a $D_{\mathrm{k}}$ jsou stejné. Velikosti amplitud $A_{\mathrm{k}}$ charakterizují to, jak významně je v náhodném procesu obsažen příslušný frekvenční interval $\omega_{\mathrm{k}} - \Delta\omega/2,\ \omega_{\mathrm{k}} + \Delta\omega/2$.

Pro rostoucí $T \to \infty$ bude $G_{\mathrm{T}}^{+}(\omega_{\mathrm{k}}) \to G^{+}(\omega)$, takže jednostranná spektrální výkonová hustota bude

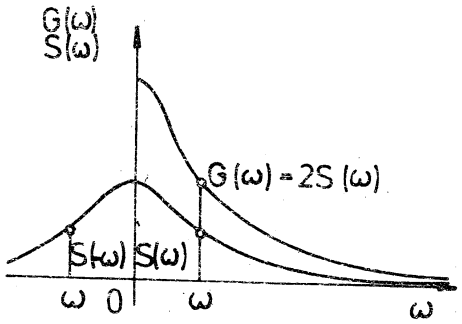
$$G_{\mathrm{xx}}^{+}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} K_{\mathrm{xx}}(\tau).\cos(\omega\tau)\,d\tau$$

Obdobně – pro $T \to \infty$ - bychom dostali i oboustrannou výkonovou spektrální hustotu

$$S_{\mathrm{xx}}^{+}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\mathrm{xx}}(\tau).\cos(\omega\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} K_{\mathrm{xx}}(\tau).\cos(\omega\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}G_{\mathrm{xx}}^{+}(\omega)$$

Rozměr výkonové spektrální hustoty je tedy [$U^2$ / rad].

Připomeňme, že jednostranná spektrální hustota je definována v oblasti kladných frekvencí (tedy frekvencí fyzikálně reálných), zatím co oboustranná spektrální hustota se vztahuje na oblast kladných i záporných frekvencí (obr. 25).




Obr. 25

Podobným postupem – dosazením

$$D_{\mathrm{k}} = S_{\mathrm{T}}^{+}\left(\omega_{\mathrm{k}}\right).\Delta\omega$$

dostaneme

$$K_{\mathrm{xx}}\left(\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{\mathrm{k}}.\cos\left(\omega_{\mathrm{k}}\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty} S_{\mathrm{T}}^{+}\left(\omega_{\mathrm{k}}\right).\Delta\omega.\cos\left(\omega_{\mathrm{k}}\tau\right)$$

Po přechodu na integrál

$$K_{\mathrm{xx}}\left(\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right).\cos\left(\omega\tau\right)d\omega = 2\int_{0}^{\infty} S_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right).\cos\left(\omega\tau\right)d\omega = \int_{0}^{\infty} G_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right).\cos\left(\omega\tau\right)d\omega$$

Poznámka

Kromě shora uvedených vztahů se užívají i některé jiné vztahy, které se liší konstantami před znakem integrálu. Zde uvedené vztahy se užívají přednostně, neboť $S\left(\omega\right)$ a $G\left(\omega\right)$ znamenají přímo rozklad rozptylu ve správných fyzikálních veličinách, bez nutnosti úpravy násobnou konstantou.

V technických aplikacích se pracuje spíše s frekvencí $f$ než s kruhovou frekvencí $\omega$. Protože pro $\tau = 0$ musí platit

$$K_{\mathrm{xx}}\left(0\right) = \mathit{rozptyl} = \int_{0}^{\infty} G_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right)d\omega = \int_{0}^{\infty} G_{\mathrm{xx}}\left(f\right)df = \mathit{plocha}$$

plyne z toho s uvážením $\mathrm{d}\omega = 2\pi\cdot\mathrm{d}f$

$$G_{\mathrm{xx}}\left(f\right) = 2\pi.G_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right)$$

a tedy též

$$G_{\mathrm{xx}}\left(f\right) = 4\int_{0}^{\infty} K_{\mathrm{xx}}\left(\tau\right).\cos\left(2\pi f\tau\right)d\tau = 2S_{\mathrm{xx}}\left(f\right)$$

Rozměr výkonové spektrální hustoty je potom [$U^2$ / Hz].

Výkonová spektrální hustota umožňuje stanovit výkon v určitém frekvenčním pásmu $f_1$, $f_2$ :

$$P(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} G_{xx}(f)\,df$$

Platí též

$$K_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)\,df = 2\int_0^{\infty} S_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)\,df$$

Pro necentrovaný proces nahradíme $K_{xx}(\tau)$ autokorelační funkcí $R_{xx}(\tau)$, takže např.

$$G_{xx}(f) = 4\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau).\cos(2\pi f\tau)\,d\tau = 2S_{xx}(f)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)\,df$$

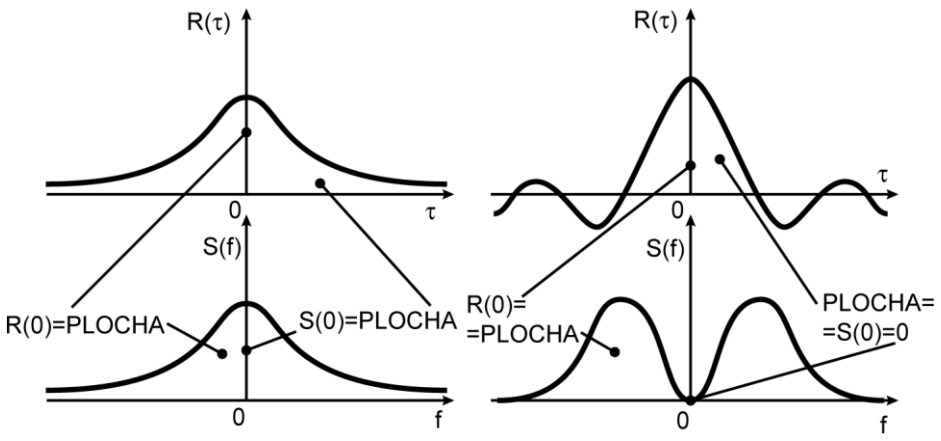
Pro $f = 0$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\,d\tau$$

Pro $\tau = 0$

$$R_{xx}(0) = m_2\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\,df = \int_0^{\infty} G_{xx}(f)\,df$$

Uvedené souvislosti jsou graficky znázorněny na obr. 26.




Obr. 26

Pro vzájemné porovnání funkcí spektrálních hustot se užívá normovaná funkce spektrální hustoty

$$S_{xx}^{nor}(f) = \frac{S_{xx}(f)}{R_{xx}(0)}$$

$$G_{xx}^{nor}(f) = \frac{G_{xx}(f)}{R_{xx}(0)}$$

### D-5.5.2 VSH a periodogram

Je-li doba měření $T$, pak lze pro každou realizaci vypočítat ***frekvenční spektrum***

$$X_T(f) = \int_0^T x(t).e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t).e^{-j2\pi ft}dt$$

Funkce $Z(f)$

$$Z(f) = \frac{1}{T}\left|X_T(f)\right|^2$$

se nazývá ***periodogram***.

Střední hodnota těchto souboru funkcí dává pro $T \to \infty$ výkonovou spektrální hustotu náhodného procesu

$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{1}{T}\left|X_T(f)\right|^2\right\}$$

Pomocí jedné realizace je možno výkonovou spektrální hustotu definovat

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f\to 0}\frac{1}{\Delta f}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{f-\frac{\Delta f}{2}}^{f+\frac{\Delta f}{2}}\left|X_T(f)\right|^2 df$$

Přitom $\Delta f \to 0$ a $T \to \infty$ odtud

$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|X_T(f)\right|^2$$

### D-5.5.3 VSH a Fourierova transformace $R_{xx}(\tau)$

Původní signál = ***originál***.

Výkonová spektrální hustota náhodného procesu *x(t)* je Fourierovou transformací jeho autokorelační funkce

$$S_{xx}(f) = F\left\{R_{xx}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau).\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

Protože $R_{xx}(\tau)$ je reálná sudá funkce, je (viz odst. o Fourierově transformaci)

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau).\cos(2\pi f\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau).\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

a rovněž

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f) = 4\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau).\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

Podobným způsobem bychom dostali korelační funkci zpětnou Fourierovou transformací výkonové spektrální hustoty

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)df = 2\int_0^{\infty} S_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)df = \int_0^{\infty} G_{xx}(f).\cos(2\pi f\tau)df$$

Tyto vztahy odvodili N. Wiener a A.J. Chinčin.

### D-5.5.4 Různé způsoby prezentace spektra

Nejčastější se frekvenční spektrum prezentuje pomocí **jednostranné výkonové spektrální hustoty** $G_{xx}(f)$ s fyzikálním rozměrem $[U^2/\text{Hz}]$ kde $U$ rozměr vyšetřované náhodné veličiny. Protože pro centrovaný náhodný proces platí

$$G_{xx}(f)\cdot\Delta f = \sigma^2 = \frac{A^2}{2}$$

je možno určit ekvivalentní amplitudu harmonického procesu

$$A = \sqrt{2G_{xx}(f)\cdot\Delta f}$$

kde $\Delta f$ je rozdíl frekvencí sousedních složek spektra (krok v odhadu výkonové spektrální hustoty při číslicovém zpracování signálu); odpovídá rozlišovací schopnosti analýzy:

$$\Delta f = \frac{f_{vz}}{N} = \frac{1}{N\cdot T_{vz}} = \frac{1}{T}$$

Zde je $f_{vz}$ vzorkovací frekvence ( $f_{vz} = 1/T_{vz}$ ), $N$ je počet vzorků, $T$ je délka vyhodnocovaného úseku. Maximální možná vyhodnocovaná frekvence je potom $f_{vz}/2$.

Pro spektra s významnými izolovanými složkami je vhodnější používat přímo **výkonové spektrum**, jehož složky mají jednotky výkonu [ $U^2$ ] . Výkonové spektrum se získá násobením složek výkonové spektrální hustoty rozdílem frekvencí složek spektra $\Delta f$ .

Další možností je prezentace **spektra s efektivními hodnotami** složek; jednotlivé složky, mající rozměr [$U$ ] , se získají odmocněním složek výkonového spektra.

U procesů představujících přechodový děj je vhodné uvádět **energetickou spektrální hustotu**. Její složky, vzniknou vynásobením složek výkonové spektrální hustoty dobou trvání záznamu. Mají rozměr [$U^2\cdot\text{s/Hz}$] .

### D-5.5.5 Cepstrum

Je vhodné pro určení harmonických složek ve frekvenčním spektru.

Cepstrum (výkonové autospektrum) $C_{xx}(\tau)$ je nejčastěji definováno jako inverzní Fourierova transformace logaritmu výkonové spektrální hustoty :

$$C_{xx}(\tau) = F^{-1}\{\log S_{xx}(f)\}$$

Soubor harmonických je potom v cepstru vyjádřen jediným maximem.

Pro definice veličin takovéto úpravy se ujalo specifické názvosloví, vycházející z označení určité veličiny uplatněním přesmyčky:

| | | | |
|---|---|---|---|
| spektrum | → cepstrum | harmonické | → rahmonické |
| frekvence | → quefrence | filtrování | → liftrování |

atd.

### D-5.5.6 Technický význam VSH

Závěrem stručně shrňme technický význam výkonové spektrální hustoty:

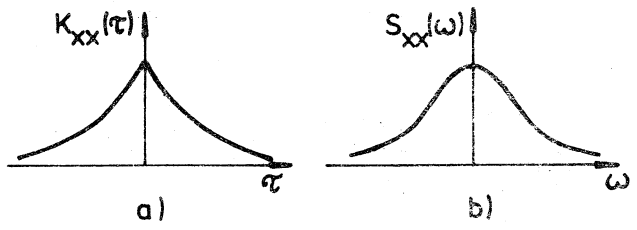
1. Pro jednotlivé frekvenční intervaly $(f_k - \Delta f_k/2,\ f_k + \Delta f_k/2)$ udává příslušné hodnoty dílčích rozptylů (u centrovaného procesu) resp. druhých obecných momentů, tj. výkonů (u necentrovaného procesu). Tyto údaje ukazují na významnost podílů frekvenčních intervalů v uvažovaném procesu.
2. Názorným způsobem ukazují vlastní frekvence a frekvence budicích sil studované dynamické soustavy.
3. Pomocí výkonové spektrální hustoty je možno stanovit amplitudy jednoduchých harmonických procesů s náhodnou fází, jimiž můžeme aproximovat náhodný proces. Tyto amplitudy jsou měřítkem významnosti jednotlivých frekvencí obsažených v náhodném procesu.
4. Je jedním ze základních vstupních veličin při posuzování životnosti v oblasti vibrační únavy (Vibration Fatigue). Tato metoda posuzování přichází v úvahu v těch případech, kdy nelze určit časový průběh napěťově deformační odezvy a posouzení je nutno uskutečnit ve frekvenční oblasti.

**Příklad 10**

Pro kovarianční funkci ergodického náhodného procesu

$$K_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \exp(-\alpha|\tau|)$$

(naznačené na obr. 27 a) určete funkci výkonové spektrální hustoty.




Obr. 27

Řešení

Pro tuto funkci platí

$$S_{xx}^{+}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{xx}(\tau).\cos(\omega\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}K_{xx}(\tau).\cos(\omega\tau)d\tau=\frac{1}{2}G_{xx}^{+}(\omega)$$

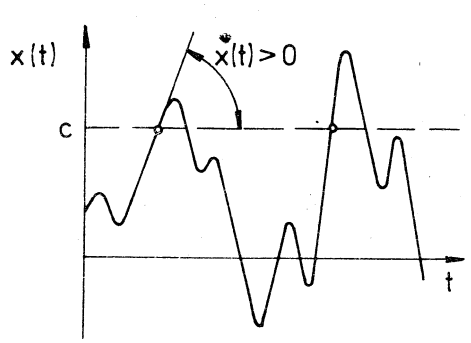
$$S_{xx}^{+}(\omega)=\int_{0}^{\infty}\sigma_x^2\cdot\exp(-\alpha|\tau|)\cos(\omega\tau)d\tau$$

Po integraci

$$S_{xx}^{+}(\omega)=\frac{\sigma_x^2\cdot\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$$

## D-5.6 Počet překročení úrovně

V problematice dynamické pevnosti a životnosti je důležité znát, zda zatížení nebo napěťově-deformační odezva nepřekročily jistou úroveň (hladinu) v průběhu provozování konstrukce. Pokud došlo k tomuto jevu, je pak třeba určit četnost jeho výskytu. Řešení této úlohy pro obecné případy je značně obtížné; zde uvedené výsledky se týkají jen zvláštních případů procesů.




Obr. 28

K překročení úrovně (k průchodu touto hladinou) může dojít dvěma způsoby (obr. 28):

- v kladném smyslu, kdy derivace $\dot{x}(t)$ je kladná (na uvedeném obrázku to je naznačeno kroužky),
- v záporném smylu – při záporné hodnotě této derivace.

Tomu odpovídají kladné $n_{+}(c)$ a záporné $n_{-}(c)$ počty překročení úrovně $c$ za časovou jednotku.

Pro stacionární procesy lze odvodit

$$n_{+}(c)=n_{-}(c)=\int_{0}^{\infty}\dot{x}f_{x\dot{x}}(c,\dot{x})d\dot{x}$$

Zde $f_{x\dot{x}}(c,\dot{x})$ je sdružená hustota pravděpodobnosti procesu $x(t)$ a jeho první derivace $\dot{x}(t) = d\,/\,dt\left[x(t)\right]$, přičemž za $x$ je dosazena daná úroveň $c$.

Střední počet kladných překročení v čase $0 \le \tau \le t$ je

$$N_+(c) = t \cdot n_+(c)$$

U stacionárních normálních centrovaných procesů platí, že $x(t)$ a $\dot{x}(t)$ jsou ve stejný časový okamžik nekorelovány, takže sdruženou hustotu pravděpodobnosti lze vyjádřit

$$f(x,\dot{x}) = f(x) \cdot f(\dot{x})$$

přičemž platí

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$$f(\dot{x}) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right]$$

kde

$\sigma_x^2 = D_x$ ..rozptyl procesu $x(t)$

$\sigma_{\dot{x}}^2 = D_{\dot{x}}$ ..rozptyl derivace $\dot{x}(t)$

Po dosazení a integraci

$$n_+(c) = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sigma_x} \cdot \exp\left[-\frac{c^2}{2\sigma_x^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} \cdot \exp\left(-\frac{c^2}{2D_x}\right)$$

Po zavedení tzv. efektivní frekvence $\omega_e$ definované

$$\omega_e = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}}$$

potom dostaneme

$$n_+(c) = \frac{\omega_e}{2\pi} \cdot \exp\left[-\frac{c^2}{2D_x}\right]$$

Z toho též plyne, že střední počet překročení nulové hladiny $c = 0$

$$n_+(0) = \frac{\omega_e}{2\pi} = \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}}$$

Tedy efektivní frekvence udává průměrnou frekvenci kladných průchodů nulovou hladinou procesu.

Další užitečnou charakteristikou je střední počet lokálních maxim procesu $n_m$ za časovou jednotku. Odpovídá střednímu počtu průchodů derivace náhodného procesu $\dot{x}(t)$ nulovou hodnotou. Obdobně jako v předchozím lze vyjádřit

$$n_{\mathrm{m}} = \int_{-\infty}^{0} \ddot{x} f_{\dot{x}\ddot{x}}\left(0, \ddot{x}\right) d\ddot{x}$$

Po dosazení a integraci dostaneme

$$n_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_{\ddot{x}}}{D_{\dot{x}}}}$$

Uvedené rozptyly náhodného procesu a rozptyly jeho derivací se vyjadřují pomocí spektrálních momentů k-tých řádů definovaných buď jako

$$M_{\mathrm{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k S_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right) d\omega = \int_{0}^{\infty} \omega^k G_{\mathrm{xx}}^{+}\left(\omega\right) d\omega$$

nebo jako

$$m_{\mathrm{k}} = \int_{0}^{\infty} f^k G_{\mathrm{xx}}\left(f\right) df$$

Mezi nimi platí vztah

$$M_{\mathrm{k}} = \left(2\pi\right)^k \cdot m_{\mathrm{k}}$$

Lze odvodit

$$D_{\mathrm{x}} = \sigma_{\mathrm{x}}^2 = M_0 = m_0$$

$$D_{\dot{\mathrm{x}}} = \sigma_{\dot{\mathrm{x}}}^2 = M_2 = \left(2\pi\right)^2 \cdot m_2$$

$$D_{\ddot{\mathrm{x}}} = \sigma_{\ddot{\mathrm{x}}}^2 = M_4 = \left(2\pi\right)^4 \cdot m_4$$

Potom střední počet překročení nulové hladiny je

$$n_{+}\left(0\right) = \frac{\omega_{\mathrm{e}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_{\mathrm{x}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M_2}{M_0}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$$

a střední počet lokálních maxim

$$n_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D_{\ddot{x}}}{D_{\dot{x}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M_4}{M_2}} = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$$

Jejich poměr

$$\nu = \frac{n_{+}\left(0\right)}{n_{\mathrm{m}}} = \frac{M_2}{\sqrt{M_0 \cdot M_4}} = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 \cdot m_4}}$$

je vhodným ukazatelem frekvenční struktury náhodného procesu (jak bude ukázáno v následující podkapitole).

## D-5.7 Rozdělení extrémů

Zajímavá je rovněž otázka charakteru rozdělení lokálních extrémů (lokálních maxim nebo lokálních minim) vyskytujících se nad (nebo pod) určitou úrovní (hladinou). Podrobné odvození překračuje rámec tohoto textu; budou zde proto uvedeny pouze výsledky vztahující se k náhodnému procesu s normálním rozdělením se stručným komentářem.

Pro takovýto případ odvodil Rice výraz pro hustotu pravděpodobnosti lokálních maxim $x_{\mathrm{m}}$; vzhledem k délce tohoto vztahu jej rozdělíme na dvě části:

$$f\left(x_{\mathrm{m}}\right) = f_1\left(x_{\mathrm{m}}\right) + f_2\left(x_{\mathrm{m}}\right)$$

$$f_1\left(x_{\mathrm{m}}\right) = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2\sigma_{\mathrm{x}}^2\left(1-\nu^2\right)}\right]$$

$$f_2\left(x_{\mathrm{m}}\right) = \frac{\nu x_{\mathrm{m}}}{\sigma_{\mathrm{x}}^2} \cdot \exp\left(-\frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2\sigma_{\mathrm{x}}^2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\nu x_{\mathrm{m}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sqrt{1-\nu^2}}\right)$$

Zde $\Phi(...)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, parametr $\nu$ byl definován v předchozí podkapitole.

Funkci $f_2\left(x_{\mathrm{m}}\right)$ lze též vyjádřit pomocí chybové funkce jako

$$f_2\left(x_{\mathrm{m}}\right) = \frac{\nu x_{\mathrm{m}}}{2\sigma_{\mathrm{x}}^2}\left[1 + erf\left(\frac{\nu x_{\mathrm{m}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sqrt{2\left(1-\nu^2\right)}}\right)\right]$$

Po zavedení normované veličiny

$$x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{m}}}{\sigma_{\mathrm{x}}}$$

dostaneme

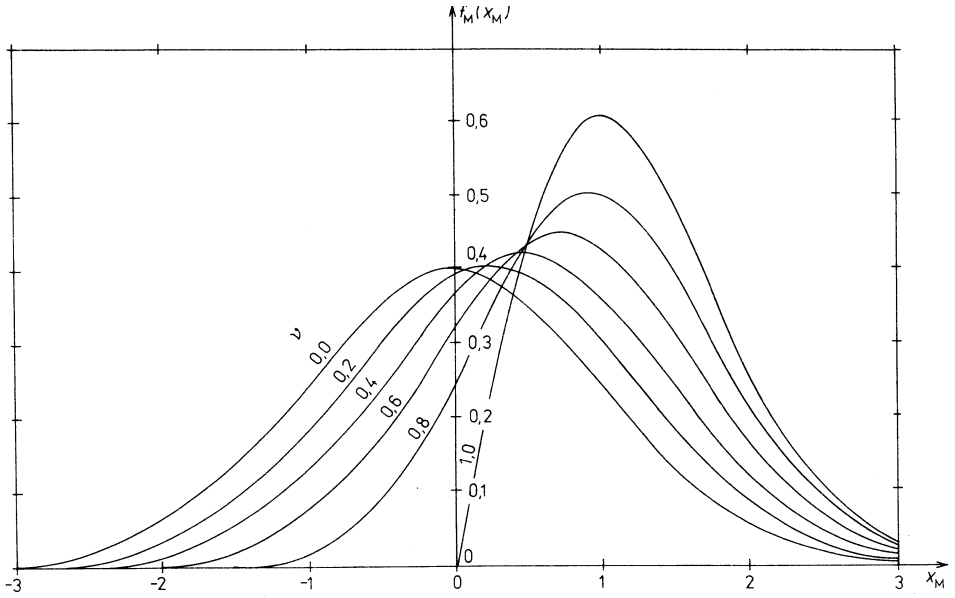
$$f\left(x_{\mathrm{M}}\right) = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x_{\mathrm{M}}^2}{2\left(1-\nu^2\right)}\right] + \nu x_{\mathrm{M}} \cdot \exp\left(-\frac{x_{\mathrm{M}}^2}{2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\nu x_{\mathrm{M}}}{\sqrt{1-\nu^2}}\right)$$

Průběh této funkce hustoty pravděpodobnosti je znázorněn na obr. 29. Je z něho patrné, že můžeme rozlišit dva krajní případy:

- případ, kdy $\nu = 0$; potom druhý člen shora uvedeného výrazu je nulový a dostáváme

$$f\left(x_{\mathrm{M}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x_{\mathrm{M}}^2}{2}\right]$$

což je hustota pravděpodobnosti normálního (Gaussova) rozdělení. Jedná se o případ širokopásmového procesu.




Obr. 29

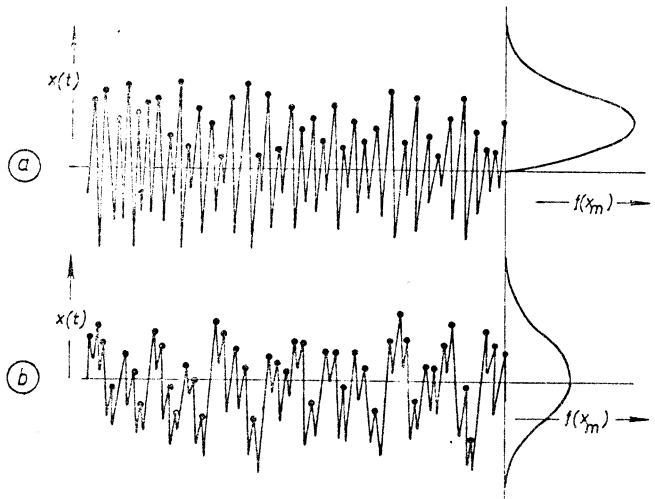
- případ, kdy $\nu = 1$; potom prvá část výrazu je nulová, ve druhé potom $\Phi(\infty) = 1$, takže pro $x_M \geq 0$ je

$$f(x_M) = x_M \cdot \exp\left(-\frac{x_M^2}{2}\right)$$

a pro $x_M < 0$ je $f(x_M) = 0$. V tomto případě se jedná o Rayleighovo rozdělení, které popisuje hustotu pravděpodobnosti lokálních extrémů úzkopásmového procesu.

Reálné provozní procesy leží mezi těmito dvěma krajními případy.

Příklady těchto dvou procesů jsou ukázány na obr. 30




Obr.30

# D-6 Systémy stacionárních ergodických náhodných procesů

Budeme tím rozumět dva náhodné procesy, které jsou navzájem v určitém vztahu – ať již geometrickém (např. složky rypných sil) nebo fyzikálním (např. závislost mezi vstupem-buzením a výstupem-odezvou mechanické soustavy). Může se dokonce jednat i o procesy, mezi nimiž není – na první pohled – zřejmá souvislost.

Uvažujme v dalším systém dvou stacionárních ergodických procesů $x(t)$ a $y(t)$. K vyjádření vzájemných statistických vazeb mezi těmito dvěma procesy se používá vzájemná korelační (resp. kovarianční) funkce a vzájemná výkonová spektrální hustota (oboustranná nebo jednostranná).

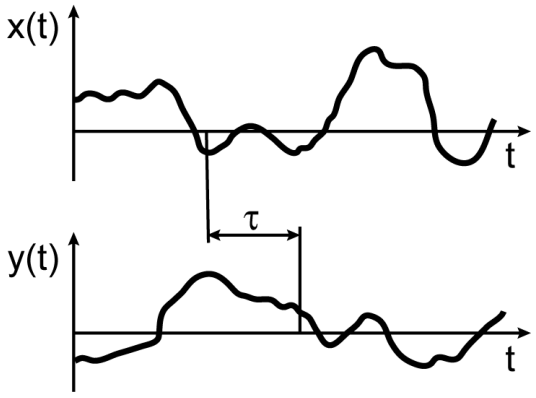
## D-6.1 Vzájemná korelační a vzájemná kovarianční funkce

Tyto funkce jsou definovány vztahy (obr. 31).

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot y(t+\tau)\,dt$$

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left\{x(t) - m_1\left[x(t)\right]\right\}\cdot\left\{y(t+\tau) - m_1\left[y(t+\tau)\right]\right\}dt$$

$$K_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_1\left[x(t)\right]\cdot m_1\left[y(t)\right]$$




Obr. 31

$R_{xy}(\tau)$ je reálná funkce, která však může nabývat jak kladných, tak i záporných hodnot. Na rozdíl od autokorelační funkce však vzájemná korelační funkce nemusí nabývat svého maxima pro $\tau = 0$ a nemusí být sudou funkcí. Platí pro ni:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{xy}(\tau) \qquad \left|R_{xy}(\tau)\right|^2 \le R_x(0)\cdot R_y(0)$$

$$\left|R_{xy}(\tau)\right| \le \frac{1}{2}\left[R_x(0) + R_y(0)\right]$$

Nejsou-li uvažované náhodné procesy korelované, je jejich vzájemná kovarianční funkce nulová pro všechna posunutí $\tau$ a vzájemná korelační funkce

$$R_{xy}(\tau) = \frac{m_1[x(t)]}{m_1[y(t)]}$$

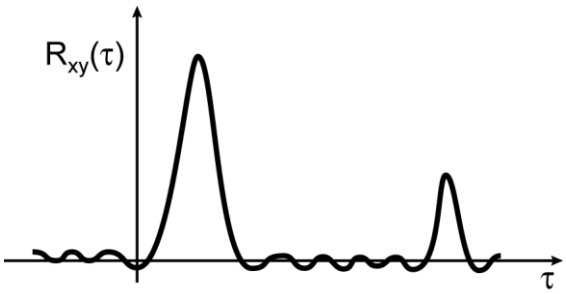
pro všechna $\tau$ .

Jsou-li oba náhodné procesy korelované, je funkce $K_{xy}(\tau)$ alespoň pro některá $\tau$ nenulová a pro určité $\tau$ dosahuje maxima.

Osahuje-li *x.y* periodickou část, má vzájemná korelační funkce pro větší posunutí $\tau$ periodický průběh.

Vzájemná korelační funkce náhodných procesů $x(t)$ a $y(t)$ je inverzní Fourierovou transformací jejich vzájemné výkonové spektrální hustoty $S_{xy}(f)$.

Příklad vzájemné korelační funkce je uveden na obr. 32.




Obr. 32

Pro porovnání procesů lze užít normovanou vzájemnou kovarianční funkci

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{K_{xy}(\tau)}{\sqrt{K_{xx}(\tau) \cdot K_{yy}(\tau)}}$$

## D-6.2 Vzájemná výkonová spektrální hustota

Tato funkce je dána Fourierovou transformací vzájemné korelační funkce

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau).\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

Jednostranná vzájemná výkonová spektrální hustota

$$G_{xy}(f) = 2S_{xy}(f) \qquad \text{pro } 0 \le f < \infty$$

$$G_{xy}(f) = 0 \qquad \text{pro ostatní } f$$

Protože vzájemná korelační funkce není sudou funkcí, je vzájemná výkonová spektrální hustota obvykle komplexní veličinou, tj. tvaru

$$G_{xy}(f) = C_{xy}(f) - jQ_{xy}(f)$$

kde

$C_{xy}(f)$ je koincidenční nebo synfázní spektrum; je to sudá funkce

$Q_{xy}(f)$ je kvadraturní spektrum; je to lichá funkce

Vzájemnou výkonovou spektrální hustotu je možno též vyjádřit ve tvaru

$$G_{xy}(f) = \left|G_{xy}(f)\right|.\exp\left[-j\Theta_{xy}(f)\right]$$

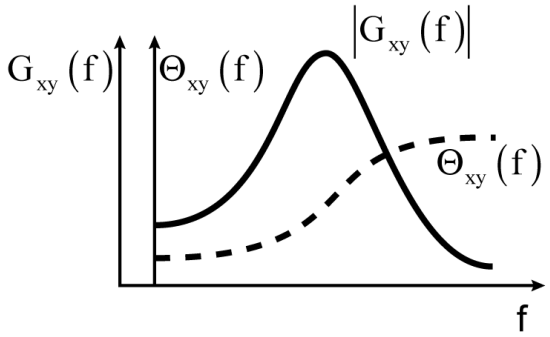
kde absolutní velikost (modul) je

$$\left|G_{xy}(f)\right| = \sqrt{C_{xy}^2(f) + Q_{xy}^2(f)}$$

a fáze

$$\Theta_{xy}(f) = \operatorname{arctg}\frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)}$$

Příklad těchto závislostí je na obr. 33.




Obr. 33

## D-6.3 Koherenční funkce

je definována

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{\left|G_{xy}(f)\right|^2}{G_{xx}(f)\cdot G_{yy}(f)}$$

Je-li při některé frekvenci $\gamma_{xy}^2(f) = 0$, potom jsou při ní funkce $x(t)$ a $y(t)$ nekoherentní, nebo jinými slovy jsou nekorelovány. Jestliže jsou funkce $x(t)$ a $y(t)$ statisticky nezávislé, je potom při všech frekvencích $\gamma_{xy}^2(f) = 0$. Naopak, jestliže při všech frekvencích je $\gamma_{xy}^2(f) = 1$, jsou tyto funkce plně koherentní. Jsou-li funkce $x(t)$ a $y(t)$ funkcemi buzení a odezvy, jedná se potom o lineární mechanickou soustavu s konstantními koeficienty. V praktických případech se těchto krajních mezí dosahuje spíše zřídka; pro vynesení soudu se spokojujeme s podmínkou, že se koherentní funkce blíží jedničce nebo nule.

### D-6.4 Frekvenční přenos

U lineární soustavy s konstantními koeficienty s jedním vstupem $x(t)$ (který je realizací stacionárního procesu) a s jedním výstupem $y(t)$ platí

$$G_{yy}(f) = |H(f)|^2 \cdot G_{xx}(f)$$

$$G_{xy}(f) = H(f) \cdot G_{xx}(f)$$

To umožňuje stanovit amplitudu a fázi frekvenčního přenosu.

## D-7 Nestacionární náhodné procesy

Výsledky rozborů naměřených náhodných procesů ukazují, že jsou většinou do určité míry nestacionární. Není-li tato nestacionarita příliš výrazná, nahrazuje se obvykle takovýto proces procesem po úsecích kvazistacionárním.

Nestacionarita se obvykle vyjadřuje časovou závislostí první a druhé hustoty pravděpodobnosti na čase nebo též závislostí střední hodnoty a rozptylu na čase.

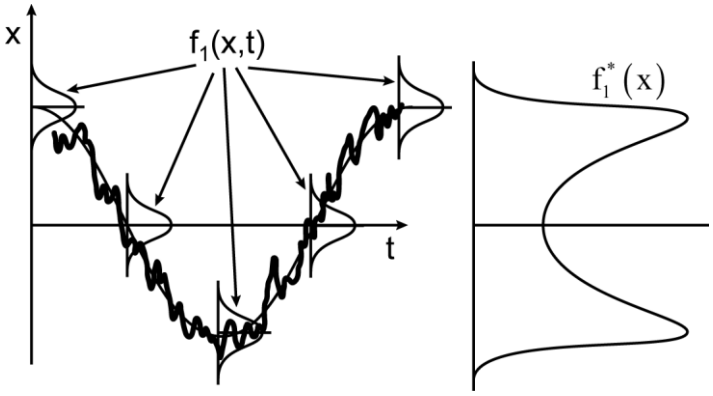
Sledujme případ náhodného procesu

$$X(t) = \varphi(t) + Y(t)$$

kde je deterministická složka

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

a $Y(t)$ je centrovaný stacionární náhodný proces s hustotou pravděpodobnosti $f_1(y)$. Hustota pravděpodobnosti procesu $X(t)$ je $f_1(x,t)$ jak je znázorněno na obr. 34.

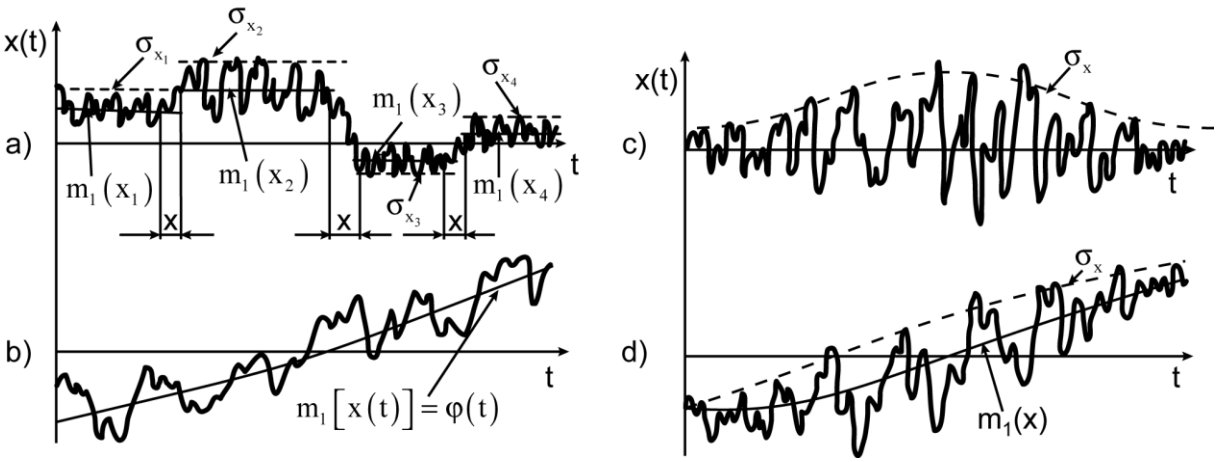



Obr. 34

Toto vyjádření, vystihující deterministckou a stochastickou složku, vyjadřuje plně strukturu procesu a je tedy vhodné z metodického hlediska. Méně vhodný je druhý způsob, kdy se proces pokládá za stacionární a vyjadřuje se hustota pravděpodobnosti $f_1^*(x)$; takto se sice zbavíme nestacionárnosti, avšak v hustotě pravděpodobnosti $f_1^*(x)$ jsou též zahrnuty informace o deterministické složce. To však není výhodné především pro případy simulace

takovéhoto procesu na zkušebním stroji v laboratoři, neboť stejný průběh $f_1^*(x)$ může mít i řada procesů výrazně odlišných.

Z uvedeného je zřejmá důležitost otázky rozboru nebo převodu nestacionárního procesu na kvazistacionární. Příslušné postupy závisejí na typu nestacionárního procesu (obr. 35).




Obr. 35

a) proces po úsecích stacionární (kdy zanedbáváme přechodové části x, pokud je jejich podíl na době trvání realizace zanedbatelný). Úseky záznamu se stejnými statistickými charakteristikami se slučují do větších kvazistacionárních celků;

b) aditivní nestacionární proces je typu

$$X(t) = Y(t) + \varphi(t)$$

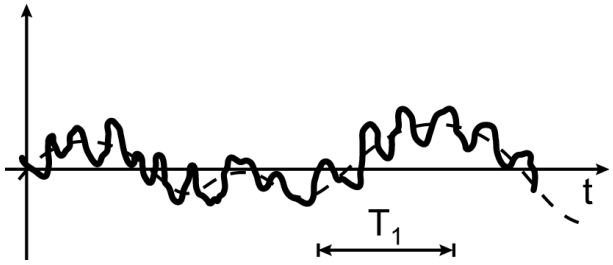
kde $Y(t)$ je stacionární náhodný proces s nulovou střední hodnotou a známou korelační funkcí, $\varphi(t)$ je deterministická funkce. Lze dokázat, že

$$m_1[X(t)] = \varphi(t) \qquad K_{xx}(t_1, t_2) = K_{yy}(\tau)$$

Jiný typ aditivního procesu je tvaru (obr. 36)

$$X(t) = Y(t) + Z(t)$$

kde $Y(t)$, $Z(t)$ jsou stacionární procesy (přitom proces $Y(t)$ je centrovaný).




Obr. 36

Jsou-li charakteristiky druhého řádu obou dílčích procesů od sebe výrazně odlišné (je-li na proces $Z(t)$ s povlovnými změnami v čase superponován podstatně rychleji se měnící proces $Y(t)$), ukazuje se důležitost délky časového úseku, na němž je posuzována stacionarita: při dlouhém úseku, kdy se uspokojivě zprůměruje i povlovný proces $Z(t)$ lze považovat sumární proces $X(t)$ za stacionární (tj. „ve velkém"). Při kratších úsecích – např. délky $T_1$ – daných třeba omezenými možnostmi měření – se projeví proces $X(t)$ jako nestacionární (nestacionarita „v malém"). Pro tento typ procesu je

$$m_1[X(t)] = m_1[Y(t)] + m_1[Z(t)]$$

$$K_{xx}(\tau) = K_{yy}(\tau) + K_{zz}(\tau) + K_{yz}(\tau) + K_{zy}(\tau)$$

c) multiplikativní nestacionární proces je typu

$$X(t) = Y(t) \cdot \varphi(t)$$

kde $Y(t)$ je stacionární proces s nulovou střední hodnotou, $\varphi(t)$ je deterministická konstanta. Vztah mezi kovarianční funkcí $K_{xx}(\tau)$ a $K_{yy}(\tau)$ je podstatně komplikovanější než v předchozích případech. U procesů, které se vyskytují v praxi platí často

$$K_{xx}(\tau, t) = \varphi(t) \cdot K_{yy}(\tau)$$

To tedy znamená, že poměrné rozložení frekvenčních složek je u procesů $X(t)$ a $Y(t)$ stejné a rozdíl je pouze v jejich rozptylech.

d) aditivně-multiplikativní nestacionární proces vznikne superpozicí multiplikativního nestacionárního procesu a deterministické střední hodnoty. Takto lze popsat prakticky každý, v praxi se vyskytující zatěžovací proces.

Shora uvedené způsoby zpracování nestacionárních procesů vyžadují především značné zkušenosti a znalosti jak fyzikální podstaty řešeného problému, tak i příčin nestacionarity; nezbytná je rovněž možnost ověření výsledků zpracování procesu.

Druhý možný způsob zpracování nepředpokládá (na rozdíl od předchozích metod) žádné apriorní vlastnosti procesu. Je založen na využití tzv. evolučních charakteristik nestacionárního náhodného procesu, tj. na statistických charakteristikách pouze jedné realizace daného nestacionárního procesu. Tyto statistické charakteristiky obsahují implicitně čas jako parametr. Prakticky to znamená, že nejsou invariantní a tedy závisejí na počátku vyhodnocování.

# Literatura


[1] Bendat, J.S. – Piersol, A.G.: *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. J.Wiley, New York 1971

[2] Bendat J.S. – Piersol A.G.: *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. J. Wiley, New York 1980

[3] Kropáč, O.: *Statistické vyhodnocování experimentálních podkladů pro pevnostní výpočty částí strojů a konstrukcí* , část II. Přednáškový cyklus Stavba strojů XXIX, Praha 1974

[4] Kropáč, O.: *Náhodné jevy v mechanických soustavách*. SNTL Praha 1987

[5] Lalanne, Ch.: *Mechanical Vibration and Shock Analysis,* Vol. 3 – *Random Vibration,* J. Wiley, New York 2009

[6] Matyáš, V.: *Měření, analýza a vytváření náhodných procesů*. SNTL Praha 1976

[7] Sedláček, M.: *Zpracování signálů v měřicí technice*. ČVUT Praha 1996

[8] Tůma, J.: *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*. Sdělovací technika 1997