

Obsah

1 Úvod.	3
1.1 Mechanika těles a fyzika.	3
1.2 Vědecká metoda - pozorování, usuzování, experiment.	4
1.3 Srovnání předmětu přírodních a technických věd.	6
1.4 Problémy, řešení problémů, inženýrství.	7
1.5 Mechanika těles jako předmět na fakultě strojní.	8
1.6 Axiomy mechaniky těles se zaměřením na statiku.	10
1.6.1 Axiom o prostoru a čase.	10
1.6.2 Axiom o hmotnosti.	10
1.6.3 Axiom o energii a zachování energie.	10
1.6.4 Axiom o silovém působení.	10
1.6.5 Axiom o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení na těleso T.	12
1.6.6 Axiom o styku těles.	13
2 Základní pojmy mechaniky těles se zaměřením na statiku.	14
2.1 Konkretizace obecných pojmů z hlediska mechaniky těles a pojmy mechaniky těles.	16
2.2 Interakce a vazba.	18
2.3 Interakce, silové působení, síla.	19
2.4 Těleso volné, vázané a uvolněné.	20
3 Silové působení na hmotné objekty.	25
3.1 Síla a její posuvné účinky	25
3.1.1 Rozdělení sil	25
3.1.2 Vyjádření sil v kartézské soustavě	28
3.2 Otáčivé účinky síly	29
3.2.1 Moment síly k bodu tělesa	29
3.2.2 Moment síly k ose	31
3.2.3 Moment silové dvojice	33
3.2.4 Souvislost momentů síly	35
3.3 Typy silových soustav	36
4 Statická ekvivalence a rovnováha silových soustav.	37

4.1	Základní úlohy statiky v případě obecných silových soustav	37
4.2	Nahrazení silových soustav v daném bodě	38
4.3	Ekvivalence silových soustav	39
4.4	Rovnováha silových soustav	40
5	Podmínky pro statickou ekvivalenci a rovnováhu.	41
5.1	Statické podmínky pro obecné silové soustavy	41
5.2	Statické podmínky pro centrální silové soustavy	45
5.3	Modifikace statických podmínek rovnováhy a ekvivalence	45
5.4	Statická určitost	46
6	Styk těles	48
6.1	Styk těles a geometrie styku	48
6.2	Silové a kinematické charakteristiky NNTN vazeb.	54
6.3	Uvolňování vazeb NNTN.	58
6.4	Uložení vázaného tělesa.	64
6.5	Typy statických úloh	72
6.6	Těžiště těles	76
6.6.1	Určení tíhové síly a polohy těžiště tělesa	76
6.6.2	Metody určování polohy těžiště	79
6.6.3	Řešené úlohy	80
7	Vázané těleso s vazbami NNTN	88
7.1	Řešení statické rovnováhy vázaného tělesa.	88
8	Soustavy těles s vazbami typu NNTN.	93
8.1	Charakteristiky soustav těles.	93
8.2	Pojmy vztahující se k soustavám těles.	97
8.3	Statické řešení soustav těles vázaných stykovými vazbami typu NNTN.	98
8.4	Zvláštní případy soustav těles	103
8.5	Prutové soustavy	104
9	Grafické řešení statických úloh	109
9.1	Základní věty grafického řešení	109
9.1.1	Věta o superpozici	110
9.1.2	Věta o dvou silách	111

9.1.3	Věta o třech silách	112
9.2	Základní grafické konstrukce odvozené z vět o dvou a o třech silách a věty o superpozici	113
9.3	Grafické řešení statické rovnováhy vázaného tělesa	120
9.4	Grafické řešení statické rovnováhy soustavy těles	123
10	Tělesa a soustavy těles s vazbami typu NNTP	130
10.1	Vazby typu NNTP – vazby s pasivními odpory	130
10.1.1	Experiment, jeho vyhodnocení a zobecnění výsledků	131
10.1.2	Obecné závěry vyplývající z experimentů a z praxe	137
10.2	Aplikace teorie coulombovského smykového tření a tuhého valení	137
10.2.1	Posuvná vazba	137
10.2.2	Těleso uložené v klínové drážce	139
10.2.3	Pásové tření	140
10.2.4	Radiální čepy – rotační vazba	141
10.2.5	Axiální čepy	143
10.2.6	Šroubová vazba	144
10.2.7	Obecná vazba – podpora	145
10.3	Statická rovnováha pohyblivě uloženého tělesa	147
10.4	Statická rovnováha soustav těles s pasivními vazbami	148
10.5	Řešené úlohy	150
11	Základy analytické statiky.	175
11.1	Základní pojmy	175
11.2	Statická rovnováha těles pomocí principů analytické mechaniky	176
11.2.1	Princip virtuální práce pro centrální silové soustavy	176
11.2.2	Princip virtuální práce pro obecné silové soustavy	177

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojního inženýrství

Ing. Zdeněk Florian, CSc. Doc. RNDr. Karel Pellant, CSc. Doc. Ing. Miroslav Suchánek, CSc.

TECHNICKÁ MECHANIKA I - STATIKA

PŘEDMLUVA

Skripta MECHANIKA TĚLES - STATIKA, která byla na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky zpracována v rámci soustavy skript MECHANIKA TĚLES, jsou určena pro posluchače strojní fakulty.

Jedná se o přepracované vydání skripta MT - Statika z roku 2003. Kapitoly 1,2 a 6-8 zpracoval Ing. Z. Florian, CSc., kapitoly 3-5 a 11 Doc. RNDr. K. Pellant, CSc a kapitoly 9, 10 a část kapitoly 6, týkající se tíhové síly Doc. M. Suchánek, CSc.

Statika je předmětem problémovým. Snahou autorů bylo, aby skripta tuto problémovost zmírnila, ale aby současně formovala a rozvíjela současné přístupy. Jestliže se to podařilo alespoň částečně a skripta se stanou skutečným studijním materiálem pro studium, zkoušku i život, budou autoři spokojeni.

Na tento studijní materiál navazuje skriptum MECHANIKA TĚLES Úlohy ze statiky, v němž jsou metodicky zpracována řešení základních tříd úloh. Snahou autorů je převést i tento studijní materiál do elektronické formy.

Autoři děkují za nepostradatelnou pomoc při zpracování textu a obrázků na počítači Ing. Tomáši Návratovi a Ing. Marcele Šlechtové.

Brno, listopad 2004

Ing. Zdeněk Florian, CSc.

Doc. Ing. Karel Pellant, CSc.

Doc. Ing. Miroslav Suchánek, CSc.

1 Úvod.

Studium mechaniky těles začíná předmětem statika. Protože se jedná o úvodní předmět mechaniky těles, připomeneme nejdříve některé souvislosti mechaniky těles s předměty, na které navazuje a její začlenění do inženýrského teoretického základu. Na začátku statiky uvedeme také některé základní poznatky z jiných vědních oborů, které studentům pomohou k snadnější orientaci v současných přístupech mechaniky těles a inženýrství vůbec, ale také k snadnějšímu pochopení výkladu v předkládaném skriptu.

1.1 Mechanika těles a fyzika.

Mechanika těles je součástí mechaniky, která patří k nejstarším částem fyziky. I když se studenti setkali s fyzikou na nižších stupních škol a v prvním ročníku na VUT, připomeneme si základní problémy a myšlenky, se kterými se ve fyzice setkáváme.

Každý student ví, že fyzika je přírodní věda. Každá část přírody se vyznačuje velkým množstvím prvků různých vlastností a vztahů mezi nimi. Přirozenou vlastností člověka je snaha nalézt základní prvky, vlastnosti a vztahy mezi nimi a tím pochopit a pokud možno i popsat mnohotvárnost přírody pomocí malého počtu základních prvků a vztahů mezi prvky.

Názorně si můžeme tuto činnost přiblížit pomocí šachové hry. Člověk, který nezná šachy a ocitne se v roli diváka šachů vidí, že hra je velice rozmanitá (hraje se už několik tisíc let a má lidem stále co říci), ale současně zjišťuje, že šachovnice a figurky jsou stále stejné a také pohyb figurek není nahodilý a figurky se vzájemně ovlivňují. Snahou člověka je poznat základní prvky hry (šachovnici a figurky) a vztahy mezi nimi (pravidla pohybu figurek a vzájemné ovlivňování). Nemuseli jsme použít jako příkladu šachů, ale třeba karetní hry nebo tenisu.

V případě fyziky, ale ne jenom fyziky, je to podobné. Velkou hrou je příroda (okolní svět). Člověk si velice brzy všiml jednotlivých částí vzájemně odlišných různými znaky jako například barvou, velikostí, materiálem, ale také charakterem pohybu. Odtud je už jen krůček k otázkám: Co mají společného různé druhy zvuků? Proč mají předměty různé barvy a kolik je základních barev? Proč se jednou prvek pohybuje rychle, jindy pomalu a někdy se vůči člověku nepohybuje vůbec? Zodpovězením podobných otázek se člověk snaží z rozmanitých projevů přírody analyzovat významné části a vztahy mezi nimi s nadějí, že opakováním tohoto procesu se přiblíží k poznání základních prvků přírody a vztahům mezi nimi.

Hledání odpovědí na dílčí otázky na základě pozorování, usuzování a experimentu nazýváme vědeckou metodou. Všechny tři části vědecké metody mají velký význam, proto se s nimi budeme blíže zabývat.



Obr. 1.1:

1.2 Vědecká metoda - pozorování, usuzování, experiment.

Pozorování.

V předchozí části jsme si připomněli, že příroda se skládá ze vzájemně rozlišitelných částí, říkáme, že příroda je strukturovaná. Jednou ze základních schopností člověka je rozlišovat části přírody, přírodu pozorovat. Pozorování je přirozenou činností člověka, při níž člověk vědomě rozlišuje části přírody s cílem získat nové informace. Rozlišovací možnosti člověka jsou dány přirozenými schopnostmi člověka, technickými prostředky a znalostmi, které úroveň rozlišovacích schopností zvyšují. Úroveň rozlišovacích schopností je obsahem pojmu *rozlišovací úroveň*. V souvislosti s tímto pojmem si musíme uvědomit, že rozlišovací úroveň je vždy omezená úrovní rozvoje vědy a techniky v dané době. Rozlišovací úroveň omezenou současnou úrovní vědy a techniky budeme označovat jako objektivní rozlišovací úroveň. Vedle objektivní rozlišovací úrovně je účelné vymezit absolutní, oborovou, věcnou, individuální a efektivní rozlišovací úroveň.

Absolutní - limitní rozlišovací úroveň, která je prakticky nedosažitelná. Na absolutní rozlišovací úrovni by člověk rozlišoval vše.

Oborová - rozlišovací úroveň charakteristická pro jistý vymezený obor např. strojírenství.

Věcná - rozlišovací úroveň pro určité konkrétní případy daného oboru.

Individuální - rozlišovací úroveň jedince nebo pracovního kolektivu daná jeho schopnostmi a možnostmi.

Efektivní - rozlišovací úroveň, která je nejvhodnější z hlediska řešeného problému.

Nerespektování rozlišovací úrovně při řešení úloh nebo problémů je základní chybou se zásadními důsledky. Rozlišovací úroveň musíme respektovat nejen u pozorování, ale také při usuzování a experimentu.

Usuzování.

Usuzování patří do procesů probíhajících ve vědomí člověka. Myslet a usuzovat znamená totéž. Základními prvky myšlení jsou pojmy a soudy. Soud je slovní vyjádření vztahu mezi pojmy, které bezprostředně souvisí s okolím člověka. Úsudek je pochod myšlení, jímž z daných soudů vyvozujeme soudy nové, poznatky. Myšlení probíhá v pojmech a vztazích. Důsledkem použití nevhodného nebo nesprávného pojmu je nesmysl, zmatečný úsudek, což můžeme poznat okamžitě nebo až na základě závažných důsledků, kterými mohou být i havárie. Žádná teorie, tedy ani teorie mechaniky těles, se neobejde bez vymezení pojmů. Vzhledem k chybám, kterých se studenti v pojmech dopouštějí a důsledkům z nich plynoucích (nesložení zkoušky), budeme se pojmem v rozsahu nutném pro mechaniku těles zabývat.

Z každodenní praxe víme, že člověk je schopen rozlišovat části okolního světa (věci, zvířata, osoby, . . . , prvky) a vztahy mezi nimi. Ze zkušenosti je zřejmé, že celá skupina odlišných věcí může mít ke člověku, případně jiným prvkům, stejný vztah. (Kuchyňský, konferenční, psací, operační - STŮL). U takové skupiny věcí existuje množina vlastností (zpravidla malá), kterou má každý prvek této skupiny a která je významná z hlediska určité funkce. Tuto množinu budeme nazývat množinou podstatných vlastností a nazveme ji, ale také odpovídající skupinu věcí, jménem. Určení skupiny podstatných vlastností a její pojmenování jsme provedli ve vědomí. Vytvořili jsme POJEM.

Pojem je pojmenovaný objekt ve vědomí člověka, který obsahuje podstatné vlastnosti skupiny prvků. Pojem má své jméno, obsah (množinu podstatných vlastností) a rozsah (množina prvků obsahujících podstatné vlastnosti). Vytváření pojmů je přirozenou vlastností člověka. Pojmy vznikají na základě přímého nebo zprostředkovaného odrazu objektivní reality a procesů ve vědomí člověka.

Pojem má složku:

objektivní - přímý nebo zprostředkovaný odraz objektivní reality.

subjektivní - je vymezen člověkem.

společenskou - život člověka je společenský. Člověk sděluje jiným lidem své myšlenky prostřednictvím jazyka. Mají-li být myšlenky jiným lidem srozumitelné, pak jazyk i pojmy musí být společné. U pojmu to znamená, že členové společnosti pod určitým jménem mají ve vědomí i stejný obsah.

Experiment.

Vedle pozorování a usuzování k vědecké metodě patří i experiment. Vymezení pojmu experiment je velmi obtížné, protože název experimentu bývá spojován s různým obsahem. Pojem experiment vymežíme z hlediska vědecké metody.

Čím se experiment výrazně odlišuje od dříve popsaných částí vědecké metody?

Až dosud jsme uvažovali, že předmětem našeho zájmu je část samotné přírody na niž člověk buď vůbec nepůsobil nebo působil jen zprostředkovaně. Cílem člověka je určení základních prvků a vztahů mezi těmito prvky z hlediska určitého děje probíhajícího na vymezené části přírody. Jestliže se snažíme určit základní prvky a vztahy mezi nimi ze samotné přírody je to velmi obtížné, protože vedle sledovaného děje probíhají často i jiné děje a procesy, které z hlediska našeho cíle působí rušivě. Proto člověk daný děj, proces nebude vyšetřovat v přírodních podmínkách, ale podmínky upraví tak, aby děj, který je předmětem jeho zájmu na materiálním objektu probíhal, ale pokud možno neprobíhalo děje jiné, které působí rušivě. Úprava podmínek může být velmi rozsáhlá a často představuje vytvoření nového materiálního objektu.

Tedy experimentem nazveme činnost, kterou člověk provádí na materiálním objektu, jenž je upraven nebo vytvořen z hlediska jeho zájmu - poznání základních prvků a vztahů mezi nimi - u vymezeného jevu, děje.

Vedle pojmu experiment se vyskytují pojmy pokus a měření. Pro tyto pojmy můžeme opět uvést to, co bylo na počátku řečeno o experimentu. Obsahem pojmu pokus budeme rozumět experiment, který je prováděn na počátku zkoumání jevu, děje, kdy o jeho struktuře toho moc nevíme. Cílem pokusu je získat základní informace umožňující určit nebo upřesnit strategii studia daného jevu, děje.

Měření je činnost při níž se určují kvantitativní údaje.

Měření bývá pojmenován také experiment, který je charakteristický tím, že strukturu sledovaného jevu, děje známe, nebo je alespoň vytvořená hypotéza a cílem experimentu je získat kvantitativní údaje k potvrzení vytvořené hypotézy nebo k dalšímu studiu.

Pojem experiment se tedy používá v širším a užším smyslu, což je schématicky znázorněno v následující tabulce.

EXPERIMENT		
Studium jevu, děje na materiálním objektu za podmínek cílevědomě upravených člověkem z hlediska sledovaného cíle		
POKUS	EXPERIMENT	MĚŘENÍ
Cíl získat vstupní informace umožňující upřesnit strategii studia jevu, děje.	Cíl vypracování, upřesnění hypotézy struktury jevu, děje. V technické praxi řešení problému.	Cíl získat kvantitativní údaje, známe-li alespoň hypotézu děje, jevu.

Tab. 1.1

1.3 Srovnání předmětu přírodních a technických věd.

Základní vlastností přírody je její strukturovanost a základní schopností člověka je strukturovanost poznávat, určovat a popisovat. *Strukturovaností* rozumíme tu skutečnost, že se příroda skládá z prvků, které jsme schopni rozeznávat stejně tak, jako vztahy mezi prvky, na kterých závisí průběh různých přírodních dějů. Konkrétní děj neprobíhá v komplexu celé přírody, ale omezuje se na určitou část, přičemž průběh daného děje neovlivňují všechny prvky, ale pouze část prvků a vztahů, které jsme nazvali podstatnými prvky a vztahy z hlediska daného děje. Podstatné prvky a vztahy mezi prvky vymezené z hlediska určitého děje tvoří strukturu přírodního děje.

Předmětem přírodní vědy je vymezení, poznání a popis struktury určité skupiny přírodních dějů, jevů na objektivní rozlišovací úrovni. Vedle věd přírodních máme vědy technické. Předmět a odlišnost předmětu technických věd od předmětu věd přírodních souvisí s posláním techniky. Posláním techniky je příprava, návrh, výroba, provoz a likvidace technických objektů, technických děl. *Technické dílo* je objekt materiální povahy vytvořený člověkem - skupinou lidí, kterou nazveme *pracovním týmem*, na základě společenské potřeby technického díla. Je vytvořen v konkrétní době, které odpovídá úroveň poznatků vědy a techniky. Realizace technického díla je z časového a ekonomického hlediska omezená.

Při tvorbě technického díla člověk tvůrčím způsobem využívá poznatků přírodních věd, tedy znalostí struktury přírodních jevů a dějů souvisejících s tvorbou technického díla a poznatků technických věd. Přesto musí pracovní tým zpravidla řešit řadu problémů. Řešení těchto problémů na rozlišovací úrovni odpovídající nalezení a popisu struktury není z ekonomického a časového hlediska možné, proto snahou pracovního týmu je vyřešení problému na rozlišovací úrovni odpovídající tvorbě daného technického díla. Vyřešením problému získá pracovní tým, případně jeho zveřejněním společnost, nový technický poznatek.

Ucelený, uspořádaný a systematizovaný soubor poznatků přírodovědného či technického oboru nazýváme *teorií oboru*. Teorie přírodovědných oborů je vytvářena na objektivní rozlišovací úrovni. Vytvoření teorie technických oborů odpovídá charakteru řešených problémů daného oboru. U teorie technických oborů musíme vždy uvažovat rozlišovací úroveň, na které byla teorie vytvořena a při řešení problému souvisejících s tvorbou technického díla je nutné využívat teorii rozlišovací úrovně vedoucí k efektivnímu řešení.

1.4 Problémy, řešení problémů, inženýrství.

Pojem problém jsme v předchozím textu již použili bez bližšího vymezení. Přestože o pojmu problém má každý student intuitivní představu, budeme se tímto pojmem blíže zabývat, protože souvisí se situacemi, kdy člověk prokazuje své schopnosti a v případě technických problémů inženýrský přístup.

Jestliže analyzujeme lidské činnosti, pak v řadě případů vzniká situace, kdy po určitém počtu kroků, které jsou typické výkonným charakterem, kdy člověk provádí činnost na základě známého postupu, dochází k situaci, kdy další postup není známý nebo není jednoznačný. Vzniká *problémová situace*, kterou člověk musí řešit na základě rozhodnutí. K rozhodnutí může člověk přistoupit různě. Můžeme rozlišit tyto přístupy:

Administrativní - zavolá šéfa, ať šéf řekne co dál, šéf vytáhne směrnice a řekne co dál - postupuje podle zpracované směrnice.

Rutinní - člověk rozhodne na základě řešení předchozích obdobných situací.

Tvůrčí - po zvážení všech dostupných informací vědomě a zodpovědně rozhodne pro efektivní nový přístup.

Seriozní - po zvážení všech dostupných informací vědomě a zodpovědně rozhodne pro objektivně nejjistější postup.

Odvážný - po zvážení všech dostupných informací vědomě a zodpovědně rozhodne pro postup efektivní, nový, u kterého však není jistota úspěšného ukončení činnosti.

Unáhlený - rozhodnutí není provedeno na základě dostatečného množství dostupných informací.

Neseriozní - řešitel rozhoduje bez informací, vědomě chybně podvodně, atd.

Problém je stav v posloupnosti činností, který člověk musí změnit, protože další činnost - není známá - je nejednoznačná - je známá, ale došlo k porušení podmínek, za kterých je realizovatelná

V celé civilizované historii lze sledovat dva principiálně odlišné přístupy člověka k řešení problémů. Je to způsob řešení problémů přímý a nepřímý. Při přímém řešení se řeší jen formulovaný problém zvoleným postupem. Vede-li postup k cíli, problém se vyřeší. Nevede-li k cíli, začíná se úplně znovu, jinak. Je to přístup, který označujeme *pokus - omyl*.

U nepřímého řešení, místo formulovaného problému řešíme jiný, snadněji zvládnutelný problém. Prostřednictvím jeho získáme řešení primárně formulovaného problému. Je to řešení oklikou, při němž člověk využívá svých schopností přemýšlet, hodnotit, posuzovat a srovnávat různé varianty s cílem dosáhnout řešení s minimálním úsilím. Ve vědeckotechnické oblasti toto řešení nazýváme *modelováním*. Má charakter chytrého, prozíravého, efektivního řešení. Není třeba zdůrazňovat, že řešení přístupem *pokus - omyl*, je v současné technice přijatelný jen u málo významných, jednoduchých a levných technických děl nebo pro řešení dílčího problému s malým počtem možných pokusů. Tímto postupem nelze řešit výstavbu atomových elektráren, vodních děl, dopravních prostředků atd. Zde je třeba v maximální míře využívat modelování. Detailnější popis modelování přesahuje rámec úvodní kapitoly těchto skript. Studenti jej mohou nalézt v [1].

Tvorba, provoz a likvidace technického díla se skládá z celého komplexu činností lidí, které na sebe navazují v časové posloupnosti příprava - návrh - výroba - provoz - likvidace.

Příprava a hlavně návrhová část technického díla se vyznačuje významnými rozhodnutími z hlediska kvality technického díla při celkové informační neurčitosti. Na počátku o novém díle, kromě zadání není známo NIC. Pracovní tým, člověk musí svoji výkonnou, ale především rozhodovací činností technické dílo vytvořit. K rozhodovacím činnostem člověk může přistoupit různě, jak je uvedeno na počátku odstavce. Má-li však nové technické dílo být úspěšné, tj. splnit potřeby společnosti, být konkurence schopné, zaujmout ostatní lidi (společnost), pak musí být vytvořeno tak, aby pravděpodobnost funkce, novosti a realizovatelnosti se blížila jedné, tedy jistotě. Tohoto lze dosáhnout tehdy, jestliže v rozhodovacích činnostech převažují přístupy - seriózní, odvážný, tvůrčí - a výkonné činnosti jsou charakterizované vysokou kvalitou. Tento přístup souhrnně označíme - *inženýrským přístupem*. Jestliže se nyní podíváme na společné znaky seriózního, odvážného a tvůrčího přístupu zjistíme, že vycházejí ze všech dostupných informací týkajících se daného problému. Součástí dostupných informací je také, a to především, teorie oboru, kterého se daný problém týká.

1.5 Mechanika těles jako předmět na fakultě strojní.

Začlenění mechaniky těles do studia na strojní fakultě souvisí s cílem studia, tj. získání inženýrského vzdělání ve strojním oboru, které umožní studentům po získání praktických zkušeností vytvářet a řídit technická díla. V předchozích odstavcích jsme popsali základní způsoby vytváření technického díla na inženýrské úrovni - modelováním. V celé historii lidstva je řešení významných problémů spojeno s modelováním. Modelový přístup řešení problémů není v určitém časovém období možný bez znalostí odpovídajících úrovni rozvoje vědy a techniky, tedy

- bez přehledu o souboru vědeckých poznatků
- bez vytvoření metody myšlení, která je charakteristická pro daný vědní obor (strojírenství na fakultě strojní)
- bez získání detailního přehledu o souboru znalostí, které jsou využívány v oboru (strojírenství). Významnou součástí tohoto souboru je teorie oboru.
- bez přehledu základních dat oboru

Mezi základní předměty teoretického základu strojírenství patří teorie mechaniky těles, která je dále hierarchicky rozdělena podle následující tabulky.

Úroveň složitosti předmětu	Předměty mechaniky těles v základním studiu na FS
1	statika kinematika
2	dynamika pružnost a pevnost I a II
3	předměty specializací

Tab. 1.2

Jaký je tedy cíl studia mechaniky těles na strojní fakultě?

Osvojení přehledu a znalostí teorie mechaniky těles spolu s myšlením, které umožní tyto znalosti využívat při řešení problémů strojírenství modelováním.

Jak už bylo uvedeno v předchozích odstavcích, osvojení teorie a myšlení určitého oboru není možné bez vymezení základních pojmů. (Pojem je základním prvkem myšlení.) Teorii oboru - ucelený, uspořádaný, systematizovaný soubor poznatků, který umožňuje logickými operacemi získávat nové informace a poznatky - si člověk lépe osvojí, jestliže zná systém jejího vytváření a uspořádání. Pro získání přehledu si dále uvedeme základní způsoby vytváření teorie. Základními způsoby vytváření teorie jsou dogmatický, axiomatický, hypotetický a postulátový.

Dogmatický: Vychází ze základních vět a operací, které umožňují vytváření vět nových. Základní věty a operace jsou dány AUTORITOU, o které nelze pochybovat.

Axiomatický: Vychází ze základních vět a logicko-matematických operací pomocí nichž vytváří nové věty a tvrzení. Základní věty musí tvořit axiomatický systém. Věty a tvrzení odvozená z axiomů jsou dokazatelná. (Axiomatickým způsobem jsou vytvářeny teorie oborů matematiky.)

Hypotetický: Vychází z pozorování a studia dějů a jevů. Pravděpodobnostní výklad daného děje nebo jevu nazýváme hypotézou. Po ověření dané hypotézy vědeckými prostředky se hypotéza stává poznatkem. Její formalizované vyjádření nazveme větou. Po získání určitého množství poznatků provádíme jejich utřídění, formalizaci, systematizování a kompletizaci - VÝSTAVBU TEORIE. (Tento způsob je charakteristický pro teorie přírodních a technických věd).

Postulátový: Pro postulátový systém platí totéž, co pro hypotetický s tím rozdílem, že hypotéza vychází z objektivní reality, je evidentní, případně demonstrovatelná. Postulát vychází z intuice člověka.

Při vytváření přírodovědných i technických teorií se uplatňuje především hypotetický a postulátový způsob. Axiomatický systém je charakteristický pro vytváření teorií matematických disciplín např. teorie eukleidovské geometrie.

Důležitou úlohu při systematizování poznatků vědeckého oboru má způsob popisu nalezených poznatků. V případě mechaniky těles jediným možným je matematický popis. Vzhledem k tomu, že statika tvoří nejstarší část mechaniky těles, je soubor základních poznatků zcela matematicky formalizovaný a proto teorii statiky můžeme vytvořit axiomatickým způsobem. Axiomy v tomto případě mají charakter základních vět, jejichž pravdivost byla mnohokrát ověřena. Vytvořený axiomatický systém odpovídá strojírenské rozlišovací úrovni. Má-li soubor axiomů splňovat podmínky axiomatického systému, musí být:

Úplný - obsahuje všechny axiomy nutné pro odvození všech vět a tvrzení dané teorie.

Bezrozporný - věty a tvrzení odvozené z tohoto systému nesmí být rozporné.

Nezávislý - žádný z axiomů nelze odvodit ze zbylých axiomů. Tato podmínka je splněna na odpovídající rozlišovací úrovni.

Teorie statiky v tomto skriptu je vytvořena axiomaticky, s možností jejího využití při řešení problémů strojírenství modelováním. Poznatky statiky jsou popsány matematicky a většina úloh a příkladů je řešena výpočtovým nebo grafickým způsobem. Znalost matematiky, odpovídající studiu na střední škole a v prvním ročníku na VUT, je vyžadována. Neznalost matematiky v uvedeném rozsahu má pro studenta závažné důsledky - nesložení zkoušky.

Z dříve uvedených souvislostí je zřejmé, že vytváření žádné teorie se neobejde bez vymezení a upřesnění pojmů. Proto po uvedení axiomů budeme pokračovat základními pojmy.

1.6 Axiomy mechaniky těles se zaměřením na statiku.

1.6.1 Axiom o prostoru a čase.

- Prostor je trojrozměrný, spojitý, izotropní, euklidovský, inerciální a absolutní.
- Čas je skalární, spojitá, ve všech bodech prostoru shodná, kladná rovnoměrně rostoucí veličina, charakterizující současnost a následnost jevů v prostoru.

1.6.2 Axiom o hmotnosti.

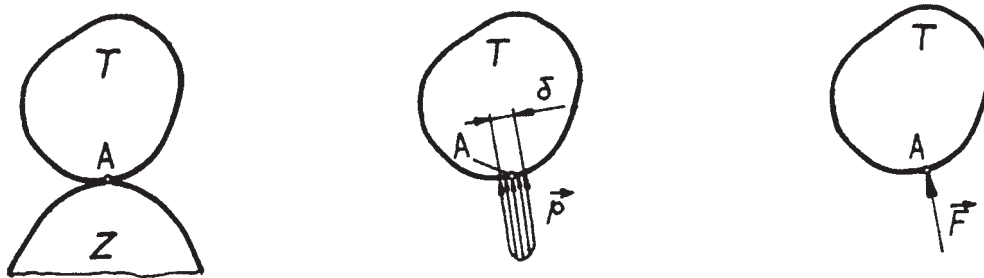
Každému prvku tělesa lze přiřadit hmotnost jako skalární veličinu charakterizující gravitační a setrvačné vlastnosti prvku.

1.6.3 Axiom o energii a zachování energie.

Energie je skalární veličina, která vyjadřuje míru změny děje. U uzavřených systémů je energie konstantní.

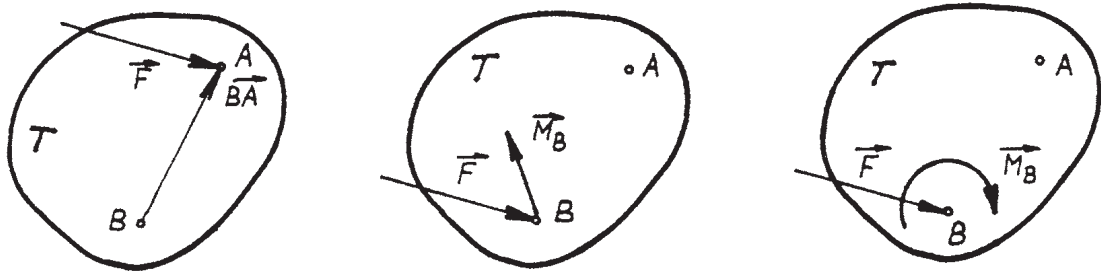
1.6.4 Axiom o silovém působení.

- Silové působení v δ okolí bodu A, které je z hlediska silového působení nepodstatné, je vektorová veličina — síla \vec{F} vázaná k bodu A. Síla \vec{F} má vlastnosti vektoru vázaného k bodu.



Obr. 1.2:

- b) Působení síly \vec{F} v bodě A tělesa lze z hlediska pohybové ekvivalence vyjádřit v libovolném bodě B silou \vec{F} a momentem $\vec{M}_B = \vec{BA} \times \vec{F}$.

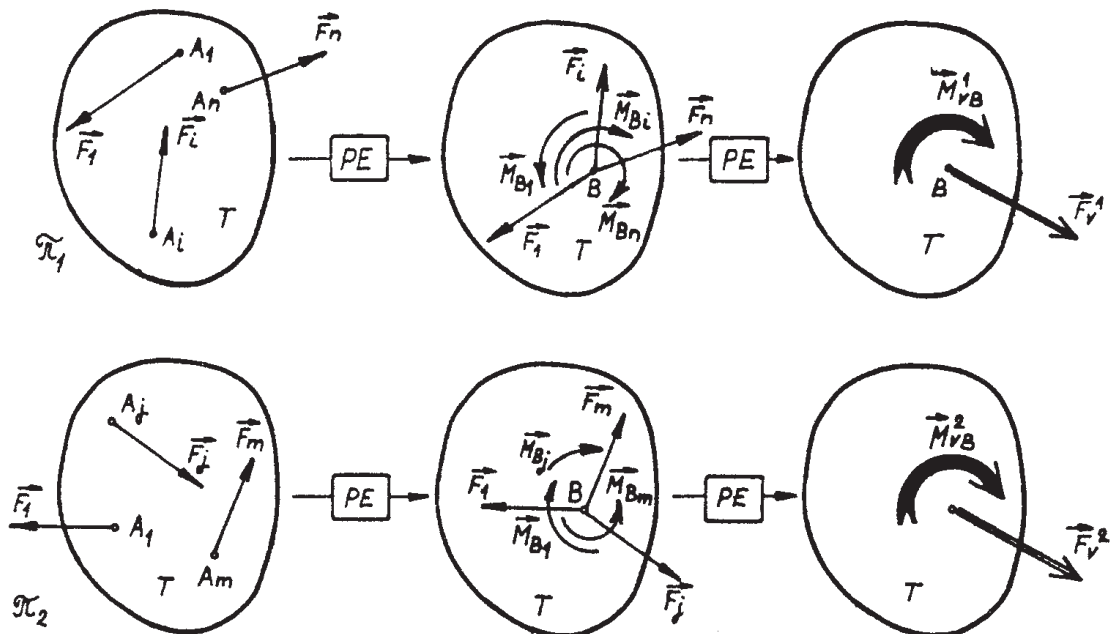


Obr. 1.3:

- c) Působení soustavy sil $\pi_1 = \{A_i, \vec{F}_i\}$ na těleso T je pohybově ekvivalentní s působením soustavy $\pi_2 = \{A_j, \vec{F}_j\}$ jestliže platí:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_v^1 = \vec{F}_v^2 = \sum_{j=1}^m \vec{F}_j \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bi} = \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2 = \sum_{j=1}^m \vec{M}_{Bj} \quad (1.2)$$



Obr. 1.4:

kde B je bod E_3 .

1.6.5 Axiom o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení na těleso T.

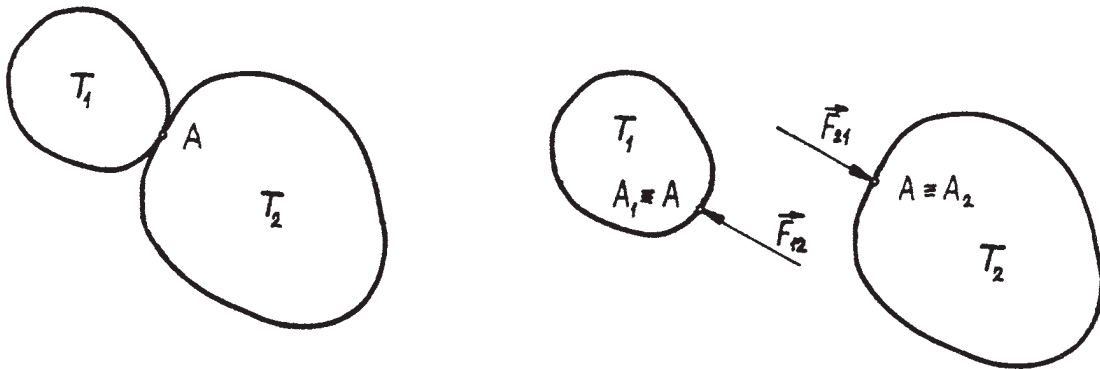
Pohyb tělesa jako celku.

- Těleso zůstává v klidu nebo v rovnoměrném pohybu, pokud není vnějšími okolnostmi nuceno tento stav změnit.
- Příčinná souvislost pohybu tělesa T jako celku a silového působení je vyjádřena vztahy:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (1.3)$$

- Existuje-li mezi dvěma tělesy T_1 a T_2 silové působení v δ okolí stykového bodu $A \equiv (A_1, A_2)$, které je z hlediska silového působení nepodstatné a vyjádříme-li silové působení

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \text{ na } T_2 \text{ silou } \vec{F}_{12} \\ T_2 \text{ na } T_1 \text{ silou } \vec{F}_{21} \end{array} \right\} \implies \text{pak platí } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{v } A \equiv (A_1, A_2)$$



Obr. 1.5:

Deformace.

- Existuje příčinná souvislost mezi silovým působením a deformací tělesa. Tuto souvislost nelze explicitně jednoduše vyjádřit. Její vyjádření je předmětem pružnosti a pevnosti.

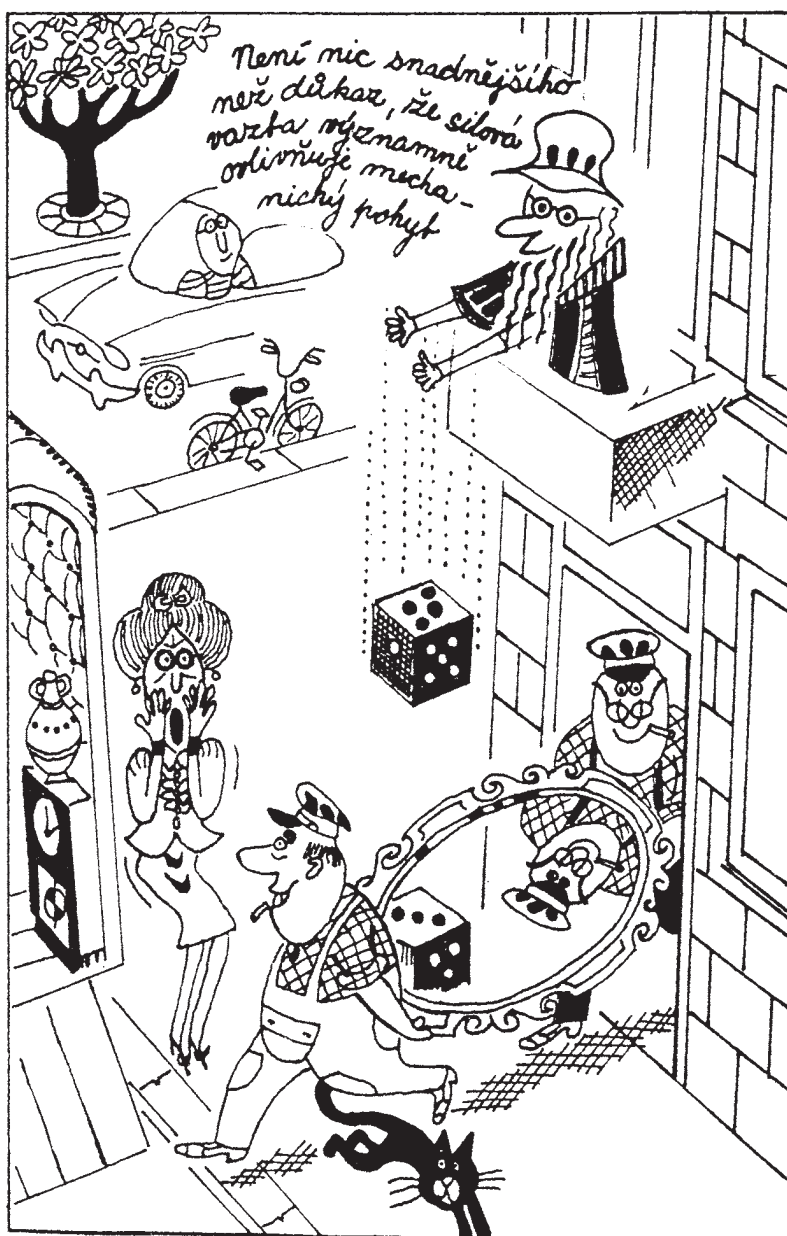
Porušování spojitosti.

- Existuje příčinná souvislost mezi silovým působením a porušováním spojitosti tělesa. Vyšetřování a popis této souvislosti je předmětem pružnosti a pevnosti.

1.6.6 Axiom o styku těles.

V bodech styku těles je pohyb

- omezen ve směru normály v důsledku neprostupnosti těles
- je ovlivněn v tečném směru, míra ovlivnění závisí napodmínkách ve styku
- je závislý na dodávání energie do styku, která je nevratná



Obr. 1.6:

Obrázek ke kapitole 3

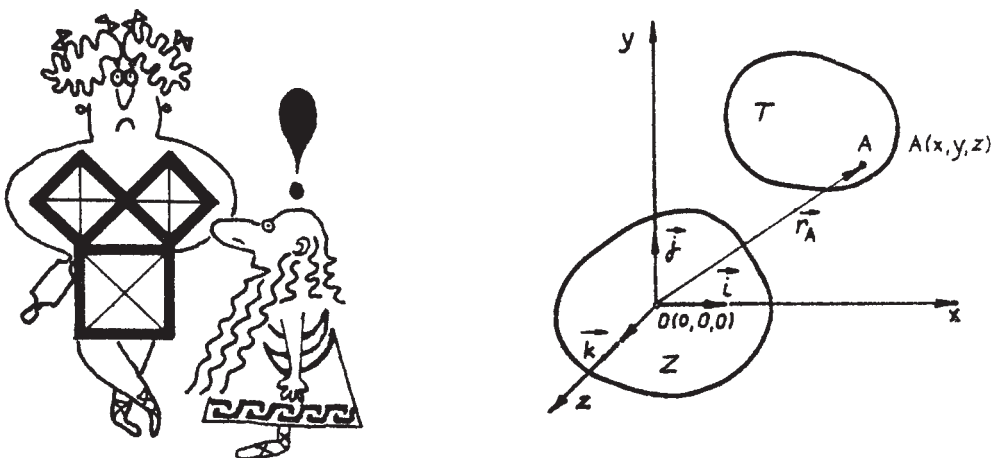
2 Základní pojmy mechaniky těles se zaměřením na statiku.

Hmota - Základní filosofická kategorie, jejímž obsahem je objektivní realita jako protiklad vědomí člověka. Základními atributy existence hmoty jsou prostor, čas, pohyb. Konkretizací hmoty na strojírenské rozlišovací úrovni je hmotný objekt, který je účelově vymezen zájmem lidí z hlediska řešeného problému.

Prostor - Obsah pojmu prostor je na objektivní rozlišovací úrovni stále předmětem zájmu vědců, kteří se snaží odpovědět na otázky týkající se konečnosti, zakřivení, dimenze atd. Na strojírenské rozlišovací úrovni je obsah pojmu prostor předmětem axiomu **A1a**.

Prostor je trojrozměrný, spojitý, izotropní, eukleidovský a absolutní.

- absolutní - lze vždy vymežit hmotný útvar, který určuje základní těleso se kterým můžeme spojit základní souřadnicový systém (základním tělesem u strojů je rám nebo základ stroje).
- trojrozměrný - báze prostoru má dimenzi tři. Každý bod prostoru vzhledem k základnímu prostoru (vztažnému prostoru) je jednoznačně určen třemi souřadnicemi. Viz obr. 2.1b.
- izotropní - vlastnosti hmotného objektu jsou nezávislé na orientaci v prostoru.
- eukleidovský - platí v něm axiomy eukleidovské geometrie (vzdálenost dvou bodů, úhel dvou přímek atd. určíme vztahy eukleidovské geometrie viz obr. 2.1a).
- inerciální - rovnice popisující mechanický pohyb jsou nezávislé na pohybu základního prostoru.
- spojitý - principiálně lze rozlišit libovolně blízké dva body.



Obr. 2.1:

Čas - Obsah pojmu čas na strojírenské rozlišovací úrovni je vymezen axiomem **A1b**.

Čas je skalární, spojitá, ve všech bodech prostoru shodná, kladně, rovnoměrně rostoucí veličina charakterizující současnost a následnost jevů a dějů.

- skalární veličina - je vyjádřena jedinou mírou nezávislou na prostorové orientaci.
- spojitá - principiálně lze rozlišit libovolně blízké časové okamžiky.
- shodná ve všech bodech prostoru - míra času je nezávislá na poloze v prostoru.
- kladně rovnoměrně rostoucí - čas postupuje vždy od minulosti do budoucnosti ve stálém rytmu.
- současnost a následnost dějů - můžeme rozlišit, zda jeden děj předcházel nebo následoval děj druhý.

Pohyb - Obsahem pojmu pohyb na objektivní rozlišovací úrovni jsou časoprostorové změny na objektu. Pohyb z filosofického hlediska se dále hierarchicky dělí, přičemž nejjednodušší formou je mechanický pohyb.

Mechanický pohyb - je nejjednodušší formou pohybu hmoty, při které nedochází ke změně molekulární struktury a nejedná se o pohyb biologický ani společenský.

Mechanický klid - je pohybový stav, charakterizovaný změnou vzdálenosti tělesa k základnímu tělesu podle vztahu $l = v \cdot t + l_0$, přičemž $v = \text{konst.}$ a nenastává rotace - rovnoměrný přímočarý pohyb nebo těleso pouze rotuje kolem pevné osy souměrnosti konstantní úhlovou rychlostí.

Mechanický jev - je každý jev v objektivní realitě, který je možné vyjádřit mechanickým pohybem, tedy časovou změnou vzdáleností - mezi hmotnými objekty - na hmotných objektech - změnou příslušnosti k hmotnému útvaru.

Subjekt - Člověk - Člověk, který má vědomí s vůlí.

Objekt - Obsahem pojmu objekt je vše, co je předmětem zájmu subjektu - člověka.

Těleso - je reálný objekt, u kterého je hmota ve formě látky v tuhém skupenství s možností deformace.

Interakce - je vzájemné ovlivňování, které jsme schopni popsat veličinami na vymezené rozlišovací úrovni. Aby interakce mohla nastat musí mezi hmotnými objekty existovat spojení.

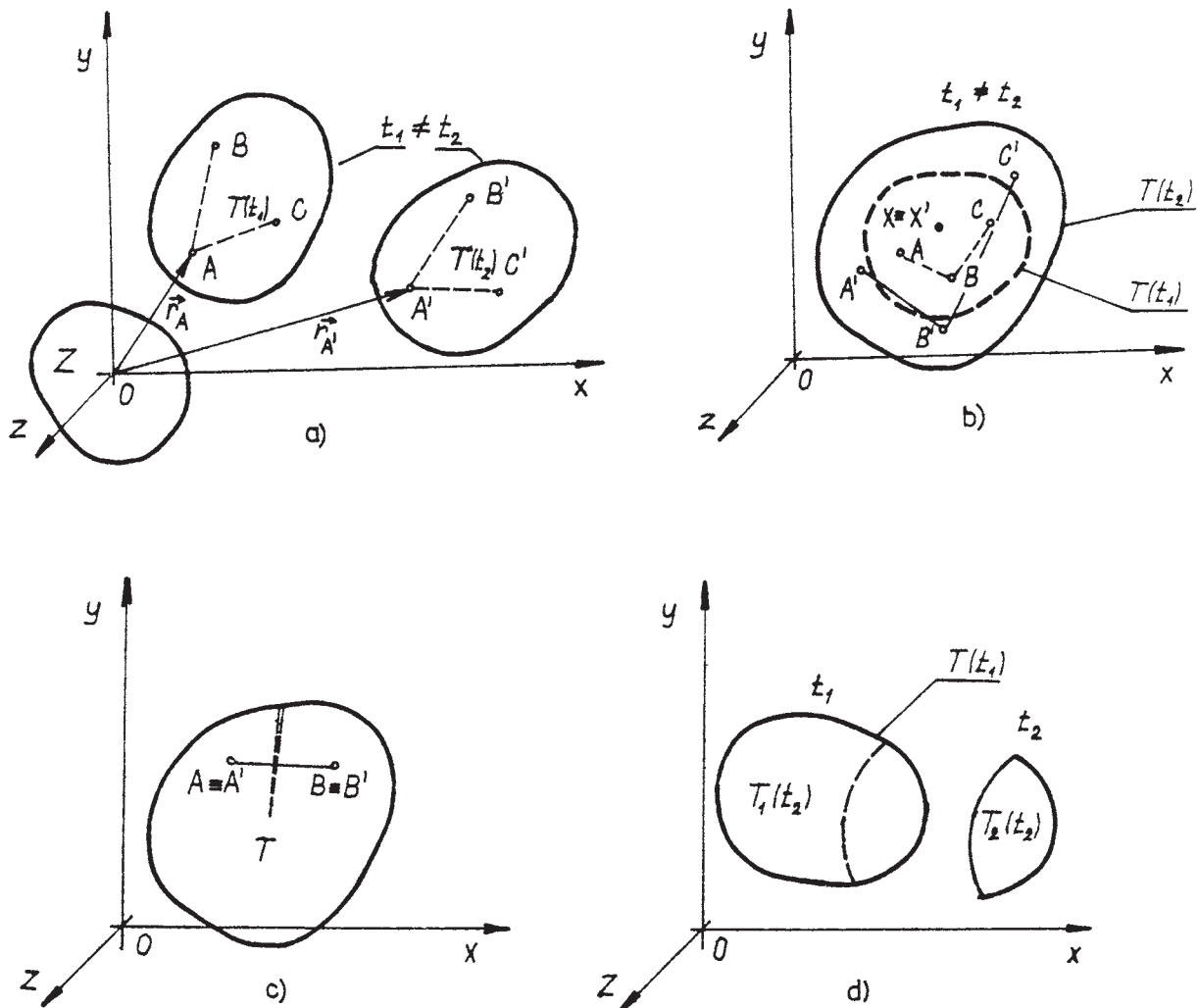
Vazba - spojení, které umožňuje interakci a je popsáno veličinami na vymezené rozlišovací úrovni.

Veličina - Obsahem pojmu veličina je vyjádření vymezených vlastností objektu z kvalitativního a kvantitativního hlediska ve formalizovaném tvaru.

Obsah uvedených pojmů byl vymezen nejstručnějším možným způsobem. V kapitole 1. jsme vymezili řadu důležitých pojmů jako např. rozlišovací úroveň, experiment, technické dílo atd. Názvy těchto pojmů jsou vytištěné kurzivou a podtržené. Vymezení těchto pojmů nebudeme opakovat. Detailnější popis přesahuje rámec těchto skript a není nezbytně nutný na počátku studia mechaniky, je však uveden v [1]. Seznámení s ním je vhodné pro pochopení širších souvislostí mechaniky a dalších oborů.

2.1 Konkretizace obecných pojmů z hlediska mechaniky těles a pojmy mechaniky těles.

Mechanický pohyb - nejjednodušší forma pohybu. Z hlediska mechaniky těles se dělí na tyto složky - pohyb tělesa jako celku, deformace, porušení spojitosti, oddělování části tělesa. Viz obr. 2.2 a-d.



Obr. 2.2:

a) složkou pohybu tělesa jako celku rozumíme část mechanického pohybu, při které se mění vzdálenost bodů tělesa vzhledem k souřadnicovému systému spojenému se základním

tělesem, ale nemění se vzdálenost libovolných dvou bodů a úhel libovolných tří bodů tělesa.

b) Deformací rozumíme složku mechanického pohybu, která je charakteristická změnou vzdálenosti libovolných dvou bodů, resp. změnou úhlu libovolných tří bodů tělesa, při neuvažování pohybu tělesa jako celku.

c) Ke změně spojitosti tělesa došlo, jestliže existují dva body A, B tělesa T takové, že v čase t_1 jsou všechny body spojnice \overline{AB} prvky tělesa T a v čase t_2 existuje bod spojnice $\overline{A'B'}$, který není prvkem T , přičemž na dané rozlišovací úrovni je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

d) Ke změně příslušnosti k tělesu dochází, jestliže v časovém intervalu došlo k oddělení části tělesa T .

Těleso - reálný objekt, jehož hmota je ve formě látky v tuhém skupenství. Na strojírenské rozlišovací úrovni je charakteristické těmito vlastnostmi.

1. Tvoří celek - tím budeme rozumět, že každá část tělesa je současně vlastností celého tělesa.

2. Je soudržné - to znamená, že oddělení části tělesa vyžaduje úsilí, které je nevratné. (Oddělení a opětovné připojení má za následek změnu vlastností)

3. Je neprostupné - zaujímá-li těleso T prostorovou oblast, pak tuto oblast nemůže současně zaujímat jiné těleso T .

4. Je vymežitelné údaji - o geometrii, materiálu, o vazbách a interakcích s okolím.

5. Je deformovatelné - nastane-li interakce tělesa T s okolím, která je významná z hlediska mechanického pohybu, pak dochází vždy k deformaci tělesa.

Uvážíme-li uvedené vlastnosti, snadno zjistíme, že každé těleso podle běžné představy tyto vlastnosti má a jen si je běžně neuvědomujeme. V mechanice těles tyto vlastnosti musíme vědomě uvažovat. V návaznosti na znalosti fyziky si v souvislosti s reálným tělesem uvědomujeme, že na objektivní rozlišovací úrovni je reálné těleso soustavou elementárních částic, jejichž struktura určuje vlastnosti tělesa.

V mechanice těles o vnitřní struktuře víme, ale na rozlišovací úrovni strojírenství je nerozlišitelná a není předmětem zájmu.

V předmětech mechaniky těles na strojírenské fakultě se budeme zabývat technickými tělesy. Jsou to tělesa, která mají charakter prvků technických děl, což znamená, že jsou pro lidi potřebná, jsou předmětem jejich zájmu, lidmi cílevědomě vytvořená, vyrobitelná a funkční. Z technických těles se zaměříme na tělesa typická pro strojírenství (např. spalovací motor, převodovka, válcovací stolice - soustavy těles, hřídel, spojka, ozubené kolo - tělesa). Pokud ve výkladu nehrozí nebezpečí chybného vysvětlení budeme přívlastky "technické" a "strojírenské" v názvu technické těleso a strojírenské těleso vynechávat. Reálnému tělesu z hlediska zájmu přiřadíme těleso abstraktní.

Abstraktní těleso - je abstraktní objekt - spojitá, neprostupná ohraničená oblast prostoru E_3 , jejímuž každému bodu jsou přiřazeny charakteristiky silového působení polí a povrchovým bodům jsou přiřazeny charakteristiky styku.

Ve strojírenství se běžně vyskytuje pole gravitačních a pole setrvačných sil. Pak jedinou materiálovou charakteristikou je jeho hustota. Hodnoty hustoty základních strojírenských materiálů jsou uvedeny v tabulce. Jejich znalost se vyžaduje.

materiál	kgm^{-3}
ocel	$7,85 \cdot 10^3$
litina	$7,30 \cdot 10^3$
hliník	$2,70 \cdot 10^3$
měď	$8,90 \cdot 10^3$
zinek	$7,10 \cdot 10^3$
olovo	$11,30 \cdot 10^3$

Tab. 2.1

Obdobně jako u pojmu *technické těleso*, pokud nehrozí nebezpečí chybného výkladu přívlasky *reálné* a *abstraktní* těleso budeme vynechávat.

Tuhé těleso - Každé reálné těleso je deformovatelné. Obsahem pojmu tuhé těleso je těleso, jehož **deformace** z hlediska řešeného problému je **nepodstatná**. V případě teorie se jedná o věty a tvrzení odvozená za předpokladu nepodstatné deformace.

Dokonale tuhé těleso - Přívlastek "dokonale" u tuhého tělesa nemá smysl, proto pojem dokonale tuhé těleso **nebudeme používat**.

POZOR!!! Výrok: "Tuhé těleso je těleso, které se nedeformuje", je nepravdivý a svědčí o nepochopení pojmu tuhé těleso nebo o nedostatečném osvojení obsahu pojmu tuhé těleso studentem, což je nepřípustné.

Prvek tělesa - je každá oddělitelná část tělesa, která má vlastnosti 1-5 tělesa.

Soustava těles - je soubor těles, vázaných vazbami, které jsou významné z hlediska mechanického pohybu a tvoří celek.

2.2 Interakce a vazba.

Vymezíme-li v objektivní realitě dva hmotné objekty H_1 , H_2 a sledujeme-li jejich vzájemné vztahy, můžeme zjistit, že na dané rozlišovací úrovni se tyto objekty

- vzájemně ovlivňují - jsou vzájemně vázané
- vzájemně se neovlivňují - jsou volné

Míru vzájemného ovlivňování můžeme vyjádřit slovně; malé - velké, významné - nevýznamné, slabé - silné, s malým dosahem - s velkým dosahem atd. Z hlediska úrovně vědy a techniky je toto vyjádření nedostatečné a snažíme se je nahradit vyjádřením veličinami. Pak hovoříme o interakci hmotných objektů.

<i>Interakce</i> je vzájemné ovlivňování objektů, které je vymezeno veličinami.

Interakce mezi objekty může nastat, jestliže mezi objekty existuje spojení. Spojení, které je vymezeno veličinami nazveme vazbou. Jestliže ve vazbě dochází k interakci mezi hmotnými objekty, pak dochází k přenosu látky, energie a informace.

Vazba je spojení hmotných objektů, které umožňuje jejich interakci a je vymezeno veličinami.

Existence vazby mezi hmotnými objekty H_1 a H_2 neznamena, že interakce právě probíhá, je však nutnou podmínkou možné interakce. Podle toho zda nastává či nenastává interakce prostřednictvím vazby, budeme v mechanice těles rozlišovat vazby:

- funkční - vazba existuje a interakce v daném okamžiku probíhá
- nefunkční - vazba existuje, interakce je možná, ale v daném okamžiku neprobíhá.

POZOR!!! Pro nefunkční vazbu **nebudeme** používat název **pasivní**, který označuje jinou vlastnost vazby.

Interakce hmotných objektů mohou mít nejrůznější charakter stejně jako vazby, které interakce umožňují. V mechanice těles se zabýváme pouze mechanickými vazbami a interakcemi, prostřednictvím nichž dochází k mechanickému pohybu.

2.3 Interakce, silové působení, síla.

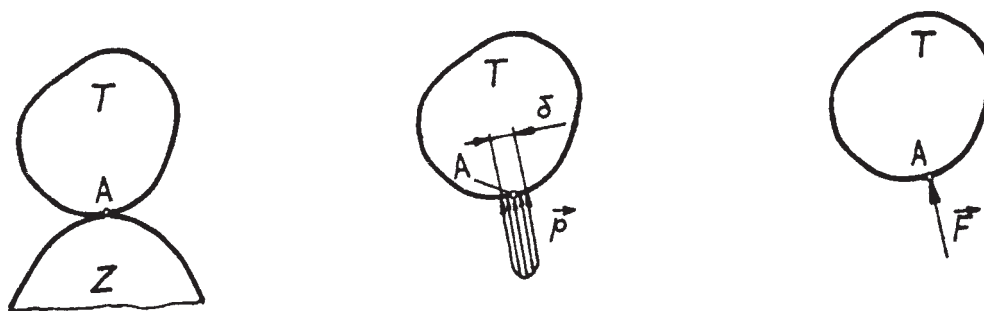
V předchozím odstavci jsme vymezili pojem interakce na úrovni vědy a techniky. Interakci, která je významná z hlediska mechanického pohybu nazýváme silovou interakcí. Silovou interakci, která nastává mezi tělesy označíme v mechanice těles názvem silové působení. Základní vlastností tělesa je jeho deformovatelnost, nastane-li mezi tělesy silové působení, pak dochází k přenosu energie ve stykovém útvaru, který je z geometrického hlediska prostorovým nebo plošným útvarem. Pokud velikost tohoto útvaru je nepodstatná z hlediska silového působení a řešeného problému, pak silové působení nazveme SILOU. Viz axiom **A4a** a obr. 2.3.

Silové působení v nepodstatném δ okolí bodu A tělesa je vektorová veličina —
síla \vec{F} vázaná k bodu A.

Silové působení je vázáno na plošnou oblast, síla na bod této oblasti. Otázkou zůstává, který bod vybrat? Silové působení můžeme vyjádřit silou, pouze v případě, že styková oblast je nepodstatná. Pak je také nepodstatné, který bod oblasti zvolíme.

Z předchozího vyplývá, že silové působení, síla vyjadřuje interakci hmotných objektů, která je podstatná z hlediska mechanického pohybu. Mechanický pohyb hmotných objektů je významně ovlivněn mechanickými vazbami. Odtud plyne, že silové působení závisí na počtu a charakteru vazeb, kterými je objekt vázán k jiným reálným objektům. Vzhledem k tomu, že předmětem našeho zájmu je těleso a na počátku studia mechaniky těles, těleso spojitě, budeme se dále zabývat uložením tělesa z hlediska pohybu tělesa jako celku, deformace a silového působení na těleso.

Uložením tělesa rozumíme soustavu stykových vazeb, kterými je těleso vázáno.



Obr. 2.3:

2.4 Těleso volné, vázané a uvolněné.

Každé reálné těleso je vázáno ke svému okolí různými typy vazeb. Dále se omezíme pouze na vazby, které významně ovlivňují pohyb tělesa jako celku a deformaci. Jsou to všechny vazby, které zprostředkují silovou interakci, jejíž mírou je silové působení na těleso.

Pro tyto *vazby*, které nazýváme *mechanické*, platí:

Každé mechanické vazbě, která podstatně ovlivňuje pohyb tělesa jako celku a deformaci, lze přiřadit silovou soustavu, která je vyjádřením a mírou změny mechanického pohybu, způsobené touto vazbou.

V souladu se skutečností, můžeme konstatovat, že mechanické vazby ovlivňují pohyb tělesa jako celku a deformaci, přičemž toto ovlivnění může být podstatné nebo nepodstatné z hlediska řešeného problému.

Rozlišení mechanických vazeb a jim odpovídajících silových soustav na podstatné a nepodstatné je NEJVÝZNAMNĚJŠÍ etapou řešení problémů modelováním.

V dalším výkladu budeme předpokládat, že vazby z hlediska řešeného problému a přípravy na řešení problémů praxe jsou podstatné. Jestliže se zamyslíme nad uvedenými souvislostmi a každodenní praxí, pak zjistíme, že v běžném životě nebývá zvykem uvažovat mechanickou vazbu a silové působení ve vzájemné souvislosti. Zpravidla uvažujeme pouze jednu stránku tohoto vztahu (silně vytištěná).

gravitační síla \longleftrightarrow gravitační vazba viz obr. 1.6 str. 13

elektromagnetická síla \longleftrightarrow elektromagnetická vazba

setrvačná síla \longleftrightarrow vazba, která se projevuje setrvačnými účinky - setrvačná vazba

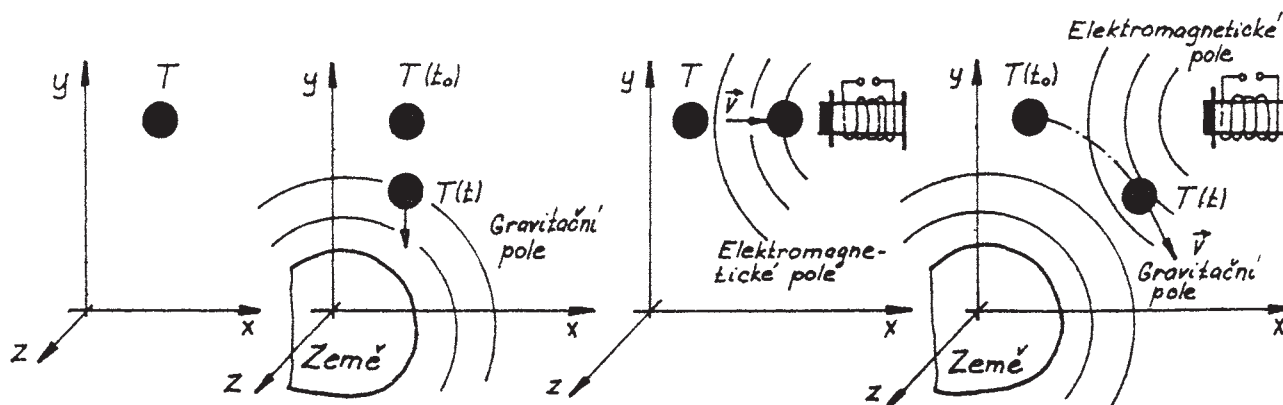
styková síla \longleftrightarrow styková vazba

Za povšimnutí stojí, že účinky gravitační, elektromagnetické a setrvačné vazby vyjadřujeme silovým působením, ale stykovou vazbu hodnotíme z důsledků styku. Z uvedeného je zřejmé, že vazby stykem mají z hlediska mechanického pohybu zvláštní vlastnosti, které jsou dány ostře vymezeným povrchem a neprostupností těles. Proto mechanické vazby dělíme na dva základní typy:

- *vazby silové*, — které mechanický pohyb ovlivňují
- *vazby stykem*, — které mechanický pohyb ovlivňují a omezují

Ovlivnění a omezení chápeme z hlediska mechanického pohybu takto: Představme si těleso v základním prostoru, které je v počátečním okamžiku t_0 v klidu a uvažujme tyto případy (viz obr. 2.4)

- | | |
|---|---|
| a) těleso volné
(vazby jsou nerozlišitelné) | - těleso zůstává v klidu |
| b) těleso v gravitačním poli zemském (směr \vec{g} je totožný s osou y) viz obr. 2.4b | - těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem ve směru osy y . |
| c) těleso je v elektromagnetickém poli podle obr. 2.4c | - těleso se pohybuje ve směru osy x , charakter pohybu závisí na charakteru elektromagnetického pole. |
| d) těleso v gravitačním a elektromagnetickém poli viz obr. 2.4d | - výsledný pohyb tělesa je určen složením pohybů c) a d). |



Obr. 2.4:

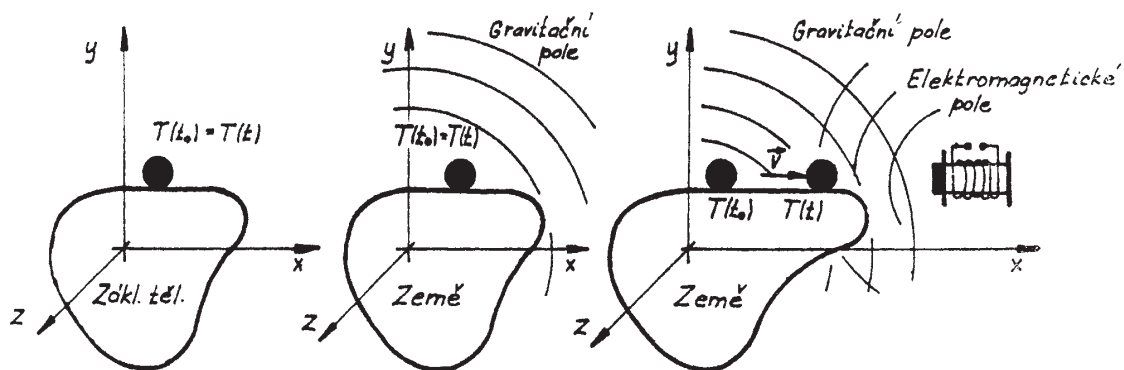
Je-li těleso vázáno silovými vazbami, pak mechanický pohyb tělesa je možný, ale závislý na charakteru silových vazeb - *pohyb je ovlivněn.*

- | | |
|---|---|
| e) těleso je ve styku se základním tělesem, které se nepohybuje viz obr. 2.5a | - těleso je v klidu |
| f) těleso je ve styku se základním tělesem a nachází se v gravitačním poli zemském viz obr. 2.5b | - těleso zůstává v klidu, vazba stykem omezuje pohyb tělesa jako celku ve směru osy y . |

g) těleso je ve styku se základním tělesem a nachází se v gravitačním poli zemském a elektromagnetickém poli viz obr. 2.5c

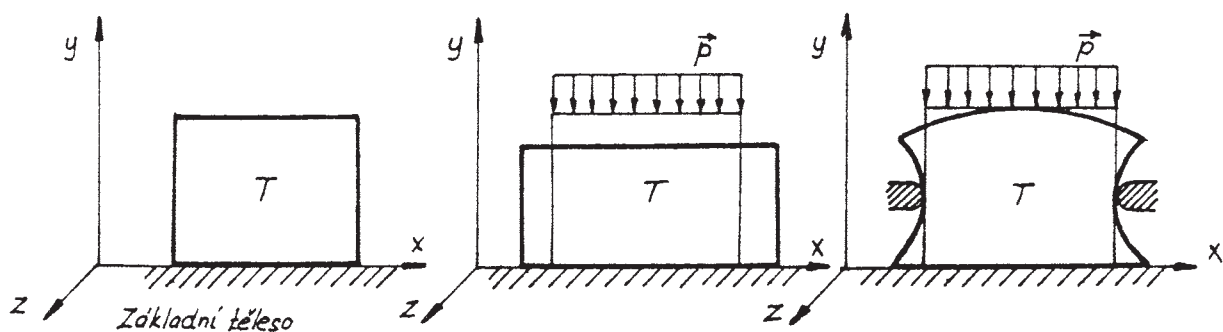
- těleso se pohybuje ve směru osy x. Charakter pohybu závisí na charakteru elektromagnetického pole a silových podmínkách ve styku. Pohyb tělesa jako celku je stykovou vazbou ve směru osy y omezen a ve směru osy x je ovlivněn oběma vazbami.

Je-li těleso vázáno stykovou vazbou, pak pohyb tělesa jako celku v místě styku ve směru normály je omezen v důsledku neprostupnosti tělesa. V tečném směru je ovlivněn. Viz obr. 2.5.



Obr. 2.5:

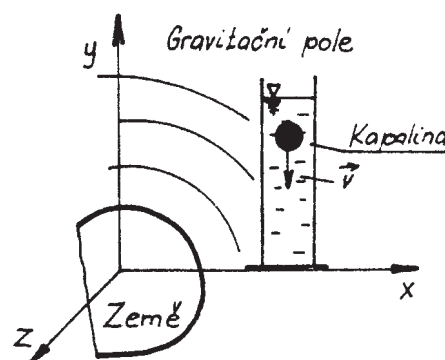
Soustava stykových vazeb nebo vazba se složitou geometrií styku omezuje nejen pohyb tělesa jako celku, ale také deformaci viz obr. 2.6.



Obr. 2.6:

K **silovým vazbám** vedle vazeb silovými poli patří také vazby stykem tělesa s prostředím (kapalina, plyn). Při styku tělesa s prostředím nedochází k omezení mechanického pohybu, protože prostředí se přizpůsobuje poloze a tvaru tělesa - pohyb pouze ovlivňuje. Viz obr. 2.7.

Těleso může být ke svému okolí vázáno soustavou vazeb různých typů. Podle významu této soustavy vazeb z hlediska pohybu tělesa jako celku a deformace rozlišujeme:



Obr. 2.7:

Těleso volné - mechanické vazby (silové a stykem) tělesa s okolím jsou nerozlišitelné.

Těleso s nepodstatnými vazbami - mechanické vazby tělesa s okolím jsou rozlišitelné, ale z hlediska řešeného problému nepodstatné.

Těleso vázané - těleso je s okolím vázáno buď silovými nebo stykovými, případně silovými i stykovými vazbami, které jsou z hlediska řešeného problému podstatné.

Podíl stykových a silových vazeb je významnou charakteristikou oborového zaměření mechaniky těles. V nebeské mechanice jsou zcela dominantní vazby silové - gravitační. Styk vesmírných těles je mimořádnou situací ve vesmíru s velmi malou pravděpodobností. Pro nebeskou mechaniku jsou charakteristické **vazby silové**.

Ve strojírenství, pro stroje a zařízení je typický velký počet součástí, které jsou ve styku a jen omezený počet silových vazeb. Pro strojírenství je tedy charakteristické, že dominantní jsou vazby stykem, i když v současném strojírenství je tendence ke zvyšování počtu silových vazeb (hydraulika, pneumatické soustavy, lineární elektromotory atd.). Vazby stykem jsou však stále ve strojírenství **primární**.

Vztah mezi mechanickými vazbami, kterými je těleso vázáno a silovým působením na těleso, vymezený z hlediska mechanického pohybu, je základním vztahem silového přístupu, kterým výklad mechaniky těles začínáme. V souvislosti se silovým přístupem vysvětlíme základní, zdánlivě jednoduchou, ale myšlenkově obtížnou operaci, kterou nazýváme **uvolněním vázaného tělesa**. K uvolnění vázaného tělesa je třeba myšlenkově nahradit mechanické vazby tělesa s okolím silovým působením, silami při zachování funkce tělesa v mechanice těles pohybu tělesa jako celku a deformací. Uvolňování je abstraktní operací probíhající ve vědomí člověka.

Výsledkem uvolnění vázaného tělesa je uvolněné těleso, na které působí soustava úplně a neúplně určených sil, při zachování pohybového stavu tělesa.

V mechanice těles jako teoretické disciplíně se obtížnost uvolňování zvyšuje tím, že k reálnému tělesu přiřazujeme abstraktní těleso popsané systémem veličin a operace uvolňování se realizuje na tomto abstraktním tělese. Na základě znalostí z fyziky umíme popsat silové působení u některých silových vazeb (např. gravitační) veličinami. Interakci tělesa s okolím, prostřednictvím těchto vazeb, někdy vyjadřujeme v zadání úloh silovým působením bez bližší specifikace určení těchto veličin.



Obr. 2.8:

3 Silové působení na hmotné objekty.

3.1 Síla a její posuvné účinky

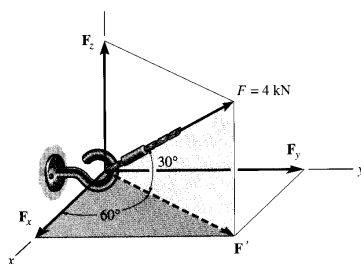
V této kapitole si popíšeme vlastnosti silových účinků působících na konstrukce a reálné mechanické soustavy. Zavedeme kvantitativní popis síly jako vektorové veličiny charakterizující míru interakce (vzájemného působení) mezi tělesy. Účinek síly na hmotný objekt přitom může být statický nebo dynamický. Při dynamickém působení se mění pohybový stav studovaného objektu tj. dochází ke změně rychlosti jednotlivých bodů tělesa. Jsou-li vazby takového charakteru, že vyvolaný pohyb je posuvný (trajektorie všech bodů při tomto pohybu jsou stejné, navzájem posunuté křivky), pak tato změna rychlosti je vyjádřena pomocí 2. Newtonova zákona

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (3.4)$$

Při statickém účinku sil na hmotný objekt nedochází ke změně pohybového stavu protože všechny síly působící na objekt jsou v rovnováze a jejich účinek se vzájemně vyruší. Při statickém účinku sil na dokonale tuhé těleso přitom nedochází k přetvoření tvaru tělesa.

3.1.1 Rozdělení sil

Pojem síly vznikl generalizací a abstrakcí subjektivního lidského pocitu tahu nebo tlaku. Příkladem může být působení lana na konzolu Jeho abstrakce je reprezentovaná vektorem (viz obr.3.1), který leží na přímce p (nositelce síly) a prochází bodem tělesa (působišťem). Vzájemné působení těles přitom nemusí být uskutečňováno přímým kontaktem těles, nýbrž i působením na dálku tj. silovým polem. (např. polem gravitačním). Jak je z názoru popř. z obr. 3.1 zřejmé, pro určení síly jako fyzikální veličiny je nutné zadat místo jejího působení (působišťe), směr, smysl působení (orientaci) na určité přímce (nositelce) a konečně velikost síly tj. míru intenzity jejího působení. Síla má tedy charakter vektoru vázaného na bod a její účinky na těleso jsou jednoznačně popsány pomocí působišťe, velikosti, směru působení a orientací.

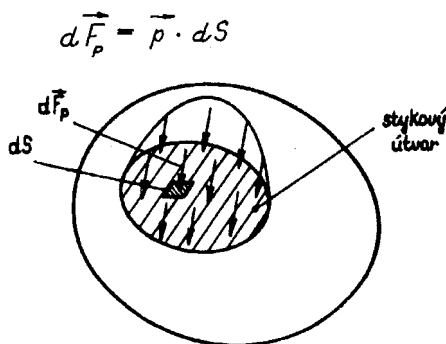


Obr. 3.1:

Graficky sílu znázorňujeme pomocí orientované úsečky \vec{F} , počátek této úsečky (v případě že se jedná o tahovou sílu) nebo konec této úsečky (v případě že se jedná o tlakovou sílu). Měřicí jednotkou pro vyjádření velikosti síly je $[F] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [N] (Newton)$. Při znázorňování síly v rovině délka úsečky vektoru síly v geometrických jednotkách (např. v cm) je úměrná velikosti síly ve fyzikálních jednotkách (např. v Newtonech), šipka určuje smysl působení síly. Všechny síly příslušející k jednomu a témuž objektu (tělesu, soustavě těles) vytváří *silovou soustavu*.

Jestliže působiště sil je omezeno na malou plošku, jejíž velikost můžeme oproti ploše povrchu hmotného objektu zanedbat tj. můžeme ji se zanedbatelnou ztrátou přesnosti soustředit do bodu, pak takové síly budeme nazývat *soustředěné* (bodové, izolované, osamocené) síly). V případě, že působení sil není omezeno na bod, pak budeme hovořit o spojitém silovém působení (např. síly na kontaktu pneumatiky s vozovkou, síly v čepech apod.). Podle charakteru oblasti která je z hlediska spojitěho silového působení významná budeme rozeznávat:

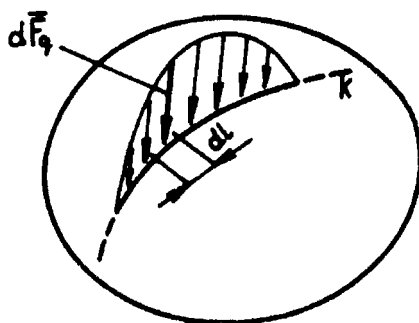
- a) *spojité objemové působení* v tomto případě síly působí v objemu tělesa (např. síly gravitační). Spojité objemové působení je určeno, je-li v každém bodě prostorové oblasti tělesa Ω známa hodnota měrné objemové síly $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(x, y, z)$ působící na jednotkový objem tělesa. Např. při působení gravitačního pole Země působí gravitační síly spojitě v celém objemu tělesa, v případě hustotně homogenního tělesa je velikost měrné objemové síly rovna $\vec{\sigma} = \rho \cdot \vec{g}$, kde ρ je hustota tělesa a \vec{g} je gravitační zrychlení. V technické mechanice, kde rozměry těles můžeme považovat za velmi malé vzhledem k Zemi, obvykle předpokládáme, že g má v celém objemu stejnou velikost $g=9,8066\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ a stejný směr. Dalšími objemovými silami mohou být síly setrvačné, elektromagnetické apod. Elementární objemová síla \vec{F}_o působící na elementární objem tělesa dV tělesa je vyjádřena ve tvaru $d\vec{F}_o = \vec{\sigma} \cdot dV$
- b) *plošné silové působení* při vzájemném styku těles se skutečná tělesa deformují a stýkají se v konečné ploše (obr. 3.2). Síly přenášené ve stykových plochách jsou tedy obecně silami plošnými a působištěm je spojitá plocha G na povrchu tělesa. Plošné silové působení je určeno je-li v každé místě plochy známa hodnota síly působící na jednotku plochy tj. tlaku $\vec{p} = \vec{p}(x, y, z)$, elementární síla působící na elementární plochu dS je dána $d\vec{F}_p = \vec{p}dS$



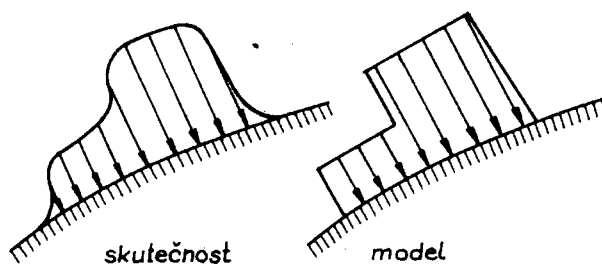
Obr. 3.2:

- c) *liniové silové působení* v tomto případě je stykovým útvarem prostorová křivka k (obr. 3.3). Liniové silové působení je určeno je-li v každém bodě této křivky známa hodnota měrné liniové síly (intenzity) $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z)$ (tj. síly působící na jednotku délky). Elementární síla působící na elementární část křivky dq je dána $d\vec{F}_q = \vec{q}dl$.

S liniovým resp. plošným zatížením se zpravidla setkáváme při vzájemném styku těles, ale může to být také kontakt tělesa s prostředím (např. tlak plynu). V praxi silové zatížení bývá spojitě podél přímé linie, orientace elementárních sil je přitom kolmá na tuto linii. V první fázi zpravidla reálné spojitě zatížení musíme nahradit výpočtovým modelem, který je průběh s konečným počtem nespojitostí. Schematicky je to ukázáno na obr.3.4.

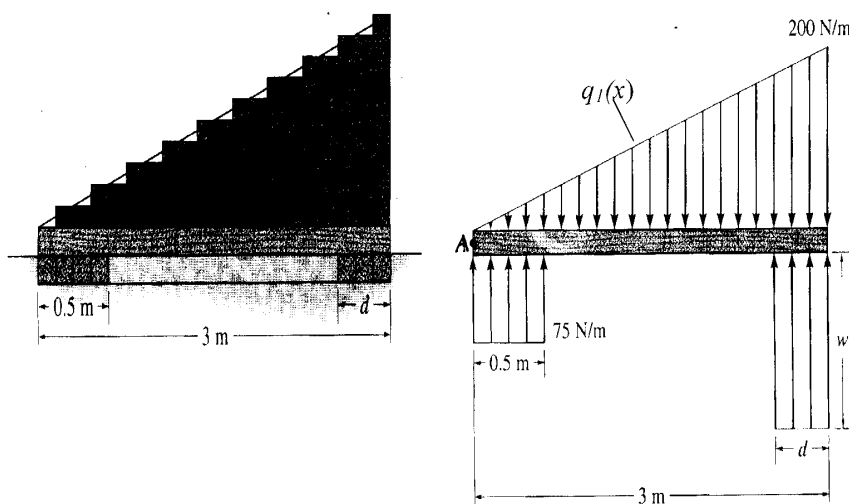


Obr. 3.3:



Obr. 3.4:

Každý po částech spojitý rozložený silový účinek můžeme přitom chápat jako soustavu neohrazeného počtu elementárních silových účinků. Výpočet si ukážeme pro případ působení podél přímé úsečky délky L . Např. na obr. 3.5



Obr. 3.5:

je znázorněno zatížení nosníku postupně se navyšující cihlovou stěnou, zatížení nosníku pak můžeme charakterizovat lineárně se zvyšujícím lineovým zatížením $q_1(x) = \frac{200}{3}x[\text{Nm}^{-1}]$, reakce od rámu pak konstantním lineovým zatížením $q_2(x) = 75[\text{Nm}^{-1}]$ a $q_3 = w$. Podrobněji

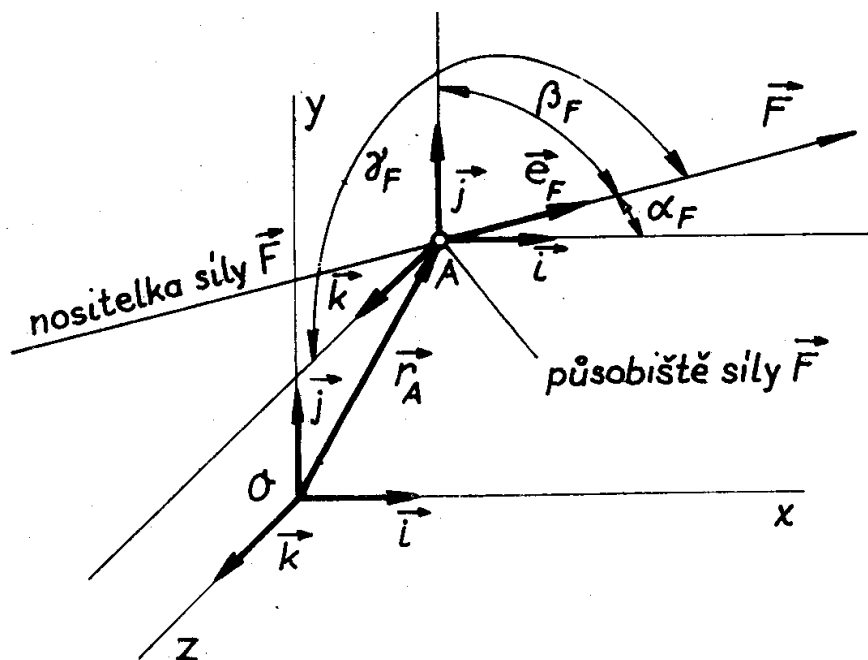
budou plošné síly a liniové síly probírány v dalších částech mechaniky (pružnosti, hydromechanice). Uvedené síly kontaktní a objemové (vyvolané účinkem silového pole), jsou pro sledovaný objekt silami vnějšími. Síly které působí uvnitř sledovaného objektu (tělesa, soustavy těles) a zabezpečují jeho celistvost jsou silami vnitřními. Síly které jsou primární příčinou změny pohybového stavu tělesa jsou silami akčními, síly reakční (vazbové) jsou síly, které vznikají až následně v místech kontaktu (tj. ve vazbách) s ostatními členy soustavy.

3.1.2 Vyjádření sil v kartézské soustavě

Předpokládejme, že na těleso působí v bodě A osamocená síla. Taková osamocená síla je pak v prostoru určena

- bodem A , který nazýváme působišťem osamělé síly, působišťe je určeno souřadnicemi x_A, y_A, z_A .
- vlastní silou \vec{F} , která působí v působišti A.

Pro analytický popis sil používáme ve statice kartézskou soustavu souřadnic, která vytváří pravouhlý, pravotočivý souřadnicový systém určený trojicí vzájemně na sebe kolmých jednotkových vektorů báze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ souřadnicových os x,y,z . Poloha bodu A (viz obr.3.6) je určena polohovým



Obr. 3.6:

vektorem $\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$ o velikosti $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$. Zapisujeme $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$. Směr polohového vektoru je určen jednotkovým vektorem $\vec{e}_{r_A} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ kde α, β, γ jsou směrové úhly vektoru. Směrové úhly odečítáme vždy od kladného směru příslušné osy směrem k vektoru v nejkratším směru tj. $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi \rangle$. Hodnoty $\cos \alpha = \frac{x_A}{r_A}$, $\cos \beta = \frac{y_A}{r_A}$, $\cos \gamma = \frac{z_A}{r_A}$, jsou kosiny směrových úhlů. Je zřejmé, že platí $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

$\vec{e}_{r_A} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Pro zadání směru vektoru tedy stačí hodnoty dvou směrových úhlů a interval úhlu třetího, např. $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ nebo $\gamma \geq \frac{\pi}{2}$. Mohou být také zadány 2 směrové kosiny a znaménko kosinu třetího např. $\cos \alpha, \cos \beta, \text{sign}(\cos \gamma)$.

Podobně vektor síly \vec{F} s působištěm A v soustavě O_{xyz} určíme tak, že do působiště síly umístíme počátek lokální souřadné soustavy se stejným směrem souřadných os jako má globální souřadná soustava O_{xyz} . Směrové kosiny pro libovolný směr jsou v obou souřadných soustavách stejné. Proto zjistíme-li směrové $\alpha_F, \beta_F, \gamma_F$ v lokálním systému, můžeme pak i pro globální souřadný systém psát $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$. Velikost síly $F = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}}$. Velikost síly je přitom nezávislá na volbě vztažného souřadného systému tj. říkáme že je to invariant. Vektorově sílu zapisujeme $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = F \cos \alpha_F, F \cos \beta_F, F \cos \gamma_F$. Skaláry F_x, F_y, F_z jsou souřadnice síly, vektory $\vec{F}_x = F_x \vec{i}, \vec{F}_y = F_y \vec{j}, \vec{F}_z = F_z \vec{k}$, jsou složky síly. Přímkou n_F je nositelka síly, pro její body platí $\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{e}_n$. Sílu tedy můžeme zapsat $\vec{F} = F \delta_F \vec{e}_F = F_n \vec{e}_n$, kde F_n je souřadnice vzhledem k nositelce (může to být číslo kladné i záporné). Toto zadání síly se často vyjadřuje tak, že osamocená síla je určena působištěm \vec{r}_A , velikostí F , směrem \vec{e}_n a orientací (smyslem). Jednotkový vektor síly určíme ze vztahu

$$\vec{e}_F = \frac{\vec{F}}{F} = \left(\frac{F_x}{F} \vec{i} + \frac{F_y}{F} \vec{j} + \frac{F_z}{F} \vec{k} \right) = \left(\cos \alpha_F \vec{i} + \cos \beta_F \vec{j} + \cos \gamma_F \vec{k} \right)$$

Nositelka síly bývá často zadávána jako spojnice 2 bodů A a B. Míří-li přitom \vec{F} z bodu A do bodu B. Pak \vec{e}_F určíme ze vztahu

$$\vec{e}_F = \left(\frac{x_A - x_B}{AB}, \frac{y_A - y_B}{AB}, \frac{z_A - z_B}{AB} \right), \text{ kde } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Při znázornění síly v rovině sílu \vec{F} zadáváme jako orientovanou úsečku vedenou z bodu A, její velikost je nakreslena ve zvoleném měřítku. Měřítko vyjadřuje kolik jednotek síly odpovídá při znázornění jednotce délky na výkresu. Je-li obrazem síly \vec{F} úsečka l_F , pak měřítko m_F je $m_F = \frac{l_F}{F}$. Průmět síly F_p do směru p (určeném jednotkovým vektorem \vec{e}_p) který svírá s vektorem síly \vec{F} úhel ϕ dostaneme pomocí skalárního násobení tj. $F_p = \vec{F} \cdot \vec{e}_p = |\vec{F}| \cdot |\vec{e}_p| \cos \phi = |\vec{F}| \cos \phi$. Proto souřadnice síly jsou vlastně průměty vektoru síly \vec{F} do směrů příslušných souřadných os.

3.2 Otáčivé účinky síly

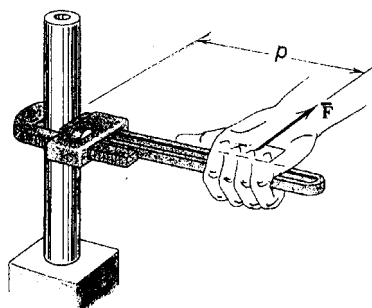
Mimo možnosti uvádět tělesa do pohybu ve směru síly má síla také schopnost otáčet tělesem tj. uvádět tělesa do rotačního pohybu (viz obr. 3.7). Změna pohybového stavu při rotačním pohybu je přitom určena vztahem

$$\vec{M}_o = J_o \frac{d(\vec{\omega})}{dt} \quad (3.5)$$

kde \vec{M}_o je moment síly vzhledem k ose rotace o a J_o je moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace a $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost rotace.

3.2.1 Moment síly k bodu tělesa

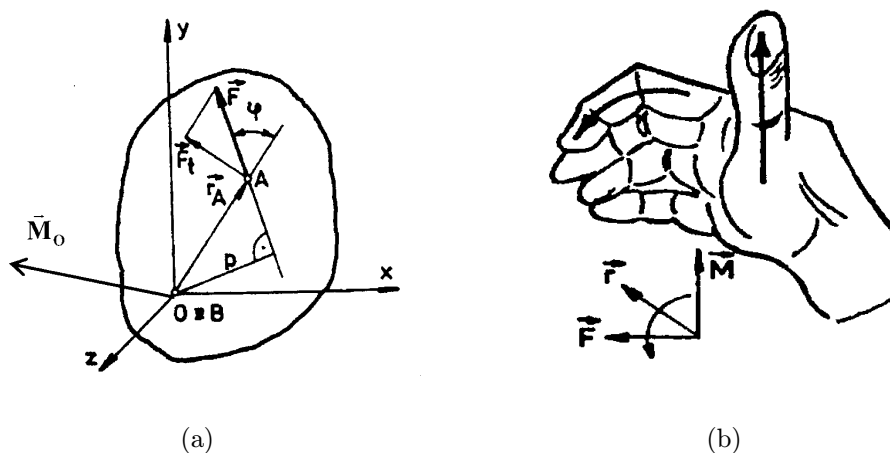
Moment síly k bodu resp. kolem osy procházející kolmo na rovinu vytvořenou silou a polohovým vektorem jejího působiště. Pro tuto schopnost síly otáčet tělesem se používá termín *moment*



Obr. 3.7:

síly k bodu tělesa. Velikost točivého účinku přitom závisí jak na velikosti síly F , tak i na velikosti ramene p (viz obr.3.7).

Předpokládejme že těleso je uloženo v bodě O (obr. 3.8a) tak, že jeho poloha se nemění. Otáčivý účinek síly \vec{F} s působištěm v bodě A k bodu O pak vyjadřujeme vektorem $\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}$. Moment síly k bodu je přitom vektor vázaný na bod O (k jinému bodu je moment síly \vec{F} jiný, proto používáme pro jeho označení vztahný bod O jako index) a je kolmý na rovinu vytvořenou vektory \vec{r}_A a \vec{F} a orientovaný na tu stranu roviny, odkud se jeví otáčení v kladném smyslu (soustava vektorů $\vec{r}_A, \vec{F}, \vec{M}_O$ je pravotočivá. Směr vektoru určíme pomocí pravidla pravé ruky tak, že prsty ukazují směr otáčení a palec přitom ukazuje orientaci vektoru momentu - obr. 3.8b. Moment označujeme kladně (+) pokud má tendenci otáčet těleso proti směru otáčení hodinových ručiček resp. záporným znaménkem (-) pokud má tendenci otáčet tělesem ve směru otáčení hodinových ručiček (tato dohoda odpovídá kladnému resp. záporné orientaci osy z).
Poznámka: Pro vektorový součin neplatí komutativní zákon tj. $\vec{M}_O \neq \vec{F} \times \vec{r}_A$



Obr. 3.8:

Jak vyplývá z definice vektorového součinu, velikost $M_o = r_A \cdot F \cdot \sin \phi = F \cdot p = F_t \cdot r_A$ kde $p = r_A \sin \phi$, $F_t = F \cdot \sin \phi$. Jsou-li vektory \vec{r}_A, \vec{F} určeny souřadnicemi $x_A, y_A, z_A, F_x, F_y, F_z$ pak moment \vec{M}_o je vyjádřen ve tvaru známém z vektorového počtu:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A y_A z_A \\ F_x F_y F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_A z_A \\ F_y F_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_A z_A \\ F_x F_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_A y_A \\ F_x F_y \end{vmatrix} = \\ &= (y_A F_z - z_A F_y) \vec{i} + (z_A F_x - x_A F_z) \vec{j} + (x_A F_y - y_A F_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

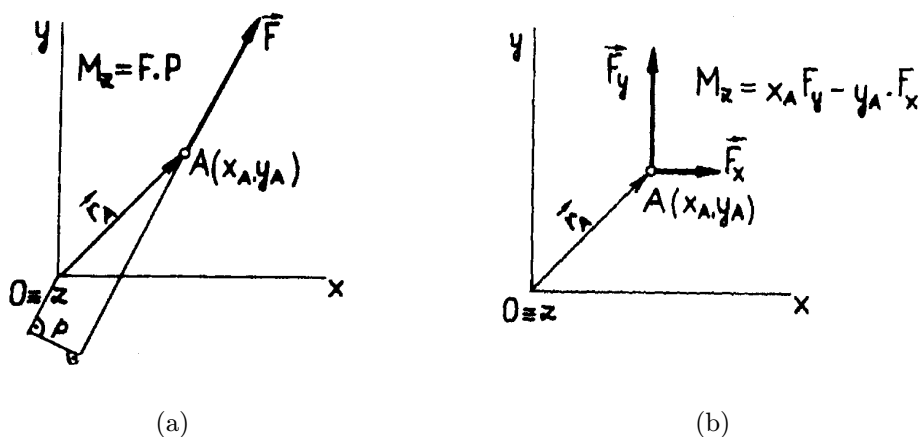
Výrazy v závorkách jsou souřadnicemi vektoru \vec{M}_O . Z vlastností vektorového počtu přímo plynou dvě následující věty (tzv. Varignonovy).

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{Ax} \vec{F} = \vec{r}_{Ax} (\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z) = \vec{r}_{Ax} \vec{F}_x + \vec{r}_{Ax} \vec{F}_y + \vec{r}_{Ax} \vec{F}_z \quad (3.7)$$

což můžeme slovy formulovat takto:

Moment síly k bodu O je roven součtu (vektorovému) momentů od jejích složek k bodu O.

Tato věta se s výhodou používá. Např. jestliže počítáme moment síly \vec{F} k ose z,



Obr. 3.9:

nepočítáme podle obr. 3.9a neboť neznáme vzdálenost p, ale výhodněji podle obr. 3.9b. Obdobně, jestliže v bodě A působí soustava sil $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_n$, pak moment od této soustavy můžeme nahradit momentem od výslednice tj. platí

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{Ax} \vec{F}_v = \vec{r}_{Ax} \sum \vec{F}_i = \sum (\vec{r}_{Ax} \vec{F}_i) = \sum \vec{M}_{O_i} \quad (3.8)$$

což můžeme formulovat takto: Moment od výslednice soustavy sil (se společným působištem v bodě A) k bodu O je roven součtu (vektorovému) momentů jednotlivých sil k bodu O. Poznámka: Moment je nulový, jestliže velikost F je nula nebo nositelka nF prochází vztažným bodem O.

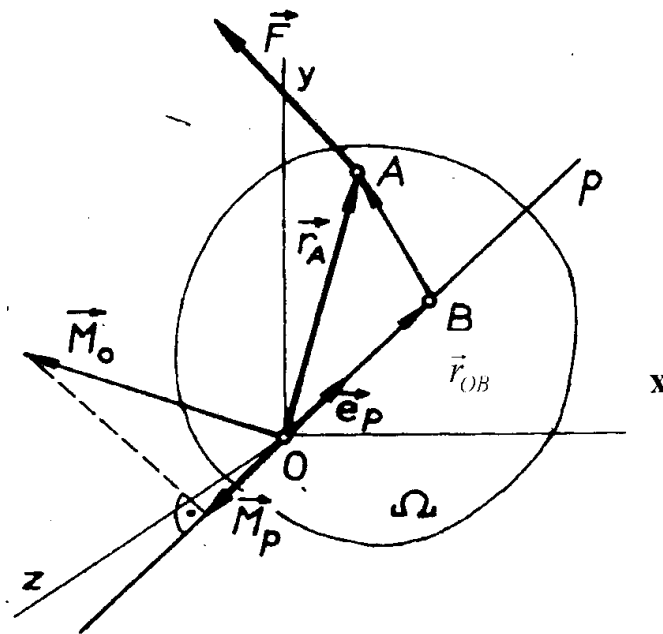
3.2.2 Moment síly k ose

Moment síly k bodu je vždy kolmý na rovinu obsahující rameno síly a vektor síly. V praxi však často potřebujeme znát i otáčivý účinek síly vzhledem k ose rotace p, která není kolmá na vektor působící síly. Předpokládejme, že těleso je uloženo v ose p. Pak se toto těleso (obr.3.10) působením síly \vec{F} s působištem v A může otáčet kolem osy p. Moment síly k bodu B je určen

vztahem $\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$. Z toho je zřejmé, že moment \vec{M}_B je závislý na poloze vztažného bodu B na ose p. Otáčivý účinek síly k ose p nemůže tedy charakterizovat moment. Musíme tedy nalézt takovou složku \vec{M}_B , která bude pro všechny body B přímky p stejná. Násobíme-li \vec{M}_B skalárně vektorem \vec{e}_p dostaneme

$$\vec{M}_B \cdot \vec{e}_p = (\vec{r}_{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p - (\vec{r}_{OB} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = (\vec{r}_{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p$$

$$\text{neboť } (\vec{r}_{OB} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = -\vec{F} \cdot (\vec{r}_{OB} \times \vec{e}_p) = 0$$



Obr. 3.10:

Veličina $\vec{M}_B \cdot \vec{e}_p$ je tedy stejná pro všechny body ležící na přímce p, je to tedy souřadnice vektoru \vec{M}_B vzhledem k ose p. Proto moment síly k ose definujeme takto: Moment síly \vec{F} působící v bodě A tělesa, k ose p, je průmětem momentu síly \vec{F} vzhledem k libovolnému bodu $B \in p$ do osy p

$$\vec{M}_p = (\vec{M}_B \cdot \vec{e}_p) \vec{e}_p, \quad \vec{M}_B \cdot \vec{e}_p = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = M_p$$

Moment síly \vec{F} k ose p je vektor \vec{M}_p vázaný k přímce p. Vyjádříme-li jednotlivé vektory $\vec{r}_A, \vec{F}, \vec{e}_p$ souřadnicemi, pak z vektorového počtu je známo, že smíšený součin (a tedy M_p) může být zapsán ve tvaru

$$M_p = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \\ \cos \alpha_p & \cos \beta_p & \cos \gamma_p \end{vmatrix} =$$

$$= F_x z_A \cos \beta_p + F_y x_A \cos \gamma_p + F_z y_A \cos \alpha_p - F_x y_A \cos \gamma_p - F_y z_A \cos \alpha_p - F_z x_A \cos \beta_p \quad (3.9)$$

Moment síly \vec{F} k počátku O je tedy roven součtu (vektorovému) momentů téže síly \vec{F} ke třem osám kartézského souřadného systému tj. můžeme psát

$$\vec{M}_O = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z \quad (3.10)$$

Souřadnice momentu \vec{M}_O do osy x je tedy rovna momentu k ose x \vec{M}_x a cyklicky tj. platí

$$M_{Ox} = M_x, M_{Oy} = M_y, M_{Oz} = M_z$$

Uvažujme nyní dva zvláštní případy:

a) Síla \vec{F} je rovnoběžná s osou p , takže potom

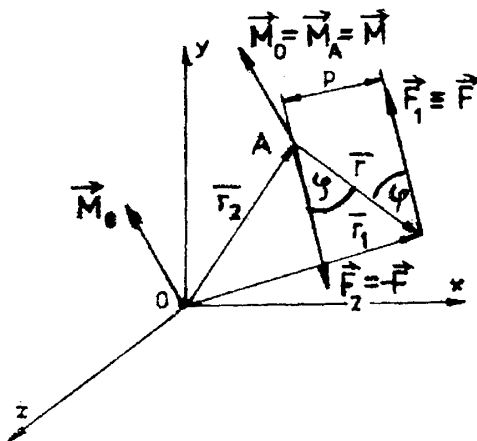
$$\vec{M}_p = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = (\vec{F} \times \vec{e}_p) \cdot \vec{r}_A = 0$$

b) Nositelka síly \vec{F} protíná osu p , pak položíme-li počátek souřadnic do společného průsečíku, je $r_A = 0$ a tedy opět $M_p = 0$.

Platí tedy: Moment síly \vec{F} k ose p je nulový, když $F = 0$, nebo když nositelka síly je rovnoběžná s osou p nebo když osu p protíná.

3.2.3 Moment silové dvojice

Zvláštním případem silové soustavy je soustava dvou sil stejně velkých ale opačně orientovaných sil. Takové soustavě říkáme silová dvojice (obr.3.11) Silová dvojice má zvláštní vlastnosti, které využíváme v každodenním životě- např. otvírání kohoutku, otáčení volantu apod.



Obr. 3.11:

Uvažujme silovou soustavu tvořenou dvěma silami \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , které jsou stejně velké tj. $F_1 = F_2 = F$ a opačně orientované tj. $e_{\vec{F}_1} = -e_{\vec{F}_2}$. Pak platí:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$$

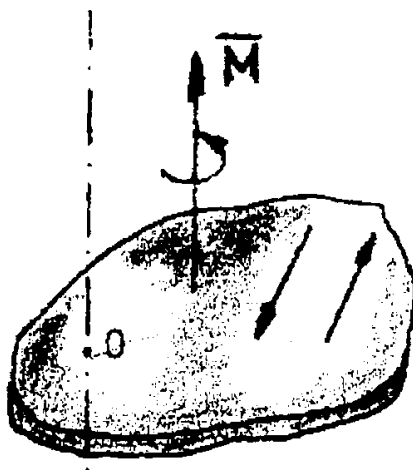
Pro výsledný moment sil \vec{F}_1, \vec{F}_2 k bodu O platí

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Jeho velikost $M = F_1 \cdot r \cdot \sin \phi = konst$ Z těchto rovnic vyplývá

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A = \vec{M} = \overrightarrow{konst}, \quad \vec{F}_V = \vec{0}$$

Silová dvojice má tedy vzhledem k libovolnému bodu stejný rotační účinek a nulový účinek posuvný. Vektor momentu silové dvojice je tedy vektor volný v prostoru, velikostí je roven součinu jedné ze sil a kolmé vzdálenosti obou nositelek a jeho orientace je dána pravidlem pravé ruky (viz obr. 3.12).

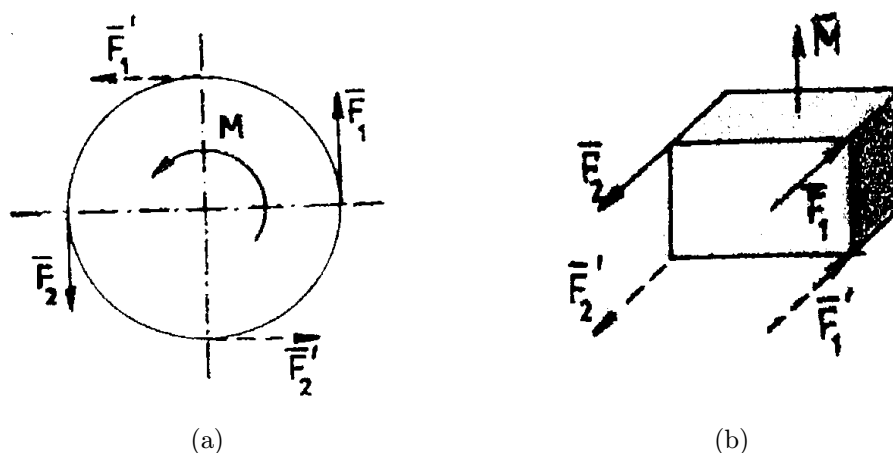


Obr. 3.12:

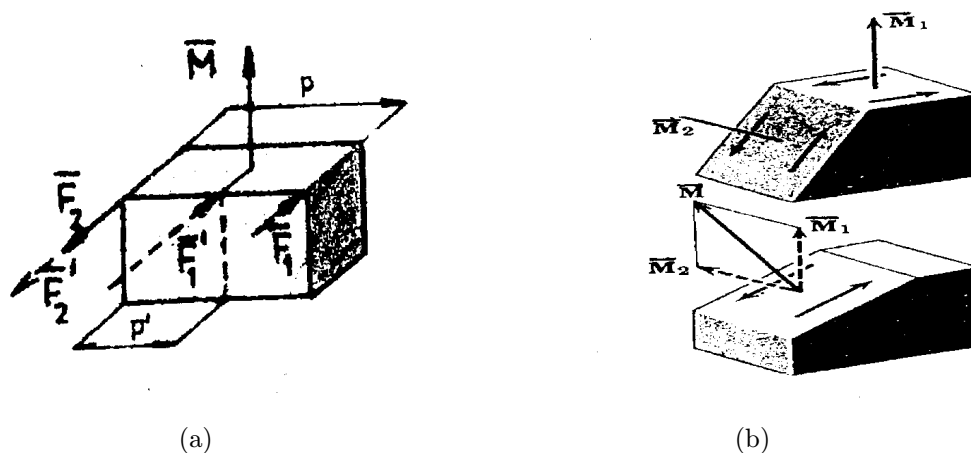
Vzhledem k tomu, že vektor momentu silové dvojice je vektor volný v prostoru, dvojicí lze

- 1) libovolně posouvat nebo otáčet v rovině (3.13a)
- 2) libovolně posouvat do rovin navzájem rovnoběžných s rovinou dvojice sil (obr.3.13b)
- 3) vykonat redukci dvojice (tj. nahradit jí jinou dvojicí) tak, aby platilo $M = F_1 \cdot p = F_1' \cdot p'$ (viz obr.3.14a).

Jestliže na těleso působí několik silových dvojic v navzájem rovnoběžných rovinách, můžeme je myšleně přemístit do bodu jedné roviny a algebraicky sčítat s ohledem na znaménka tj. $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$. Jestliže silové dvojice působí v různoběžných rovinách, po přemístění do libovolného



Obr. 3.13:



Obr. 3.14:

bodů prostoru je můžeme sčítat vektorově. Výsledný moment je $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, přitom silová dvojice tohoto momentu leží v rovině kolmé na \vec{M} (Obr. 3.14d). Působí-li na těleso n silových dvojic, pak všechny tyto dvojice můžeme nahradit v libovolném místě tělesa jejich momenty $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$. Protože jde o vektory procházející jedním bodem, určíme výsledný moment jejich vektorovým součtem tj.

$$\vec{M}_V = \sum \vec{M}_i$$

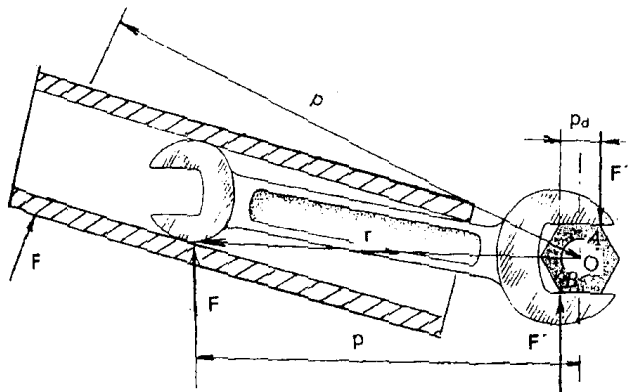
Poznámka k označování: \vec{M}_B - moment síly \vec{F} k bodu B \vec{M}_p - moment síly \vec{F} k ose p \vec{M}_p - moment silové dvojice $(\vec{F}, -\vec{F})$ Při znázorňování silové dvojice v její rovině, tj. v rovině určené rovnoběžnými nositelkami, užíváme tuto symboliku:

kde symbol \Leftrightarrow budeme dále používat pro ekvivalenci ať již z hlediska označování veličin tak i z hlediska mechanické ekvivalence. Poznámka: Pokud se bude dále vyskytovat název moment bez bližšího vymezení (nebude uváděn vztažný bod), bude se vždy jednat o moment silové dvojice.

3.2.4 Souvislost momentů síly

Všechny uvedené momenty mají stejnou fyzikální podstatu a stejný rozměr $N.m$. Rozdíl je však geometrická interpretace. V konečném výsledku otáčivý účinek vždy odpovídá dvojici

sil. Souvislost mezi momentem síly k bodu, momentem k ose a momentem silové dvojice si ozřejmíme na příkladu dotahování matice klíčem (obr. 3.15).



Obr. 3.15:

Míra mechanického působení síly \vec{F} k bodu O je dána velikostí ramene klíče, tedy polohovým vektorem \vec{r} nebo kolmým ramenem p od osy otáčení a nositelkou síly \vec{F} . Jestliže se změní rameno síly \vec{F} (např. prodloužením ramena pomocí trubky), změní se i moment síly k bodu O . Vzhledem k nezbytné vůli potřebné k zasunutí klíče na matici dojde při otáčení klíče k bodovým kontaktům v místech AaB na okrajích matice jak je naznačeno na obr.15. V bodech dotyku $AaBS$ tedy bude působit silová dvojice (\vec{F}', \vec{F}'') . Tato silová dvojice vyvolá moment velikosti M_k potřebný na uvolnění matice. Souvislost mezi velikostí sil $(\vec{F}' = \vec{F}'')$ dvojice sil a velikostí zátěžné síly \vec{F} je dána rovnicí $M_k = F \cdot p_d = F \cdot p$. Na matku tedy působí silová dvojice a ta je vektor volný v prostoru. Proto také při povolování matic na kole vozidla musíme začít s povolováním před vyheverováním vozidla (jinak se nám kolo protáčí v ose kola tj. v místě možného působení momentu silové dvojice M_k).

Při přenosu silových působení v technických zařízeních vzniká často moment silové dvojice mezi akční působící silou a silou reakční od rámu. Např. při otáčení volantů jednou rukou vzniká reakční síla v uložení hřídele řízení a způsobuje namáhání uložení. Zároveň vzniklá reakční síla vytváří s akční silou působící na volant nežádoucí silovou dvojici která namáhá hřídel volantů. Dalším zdrojem namáhání hřídele volantů je od momentu silové dvojice vzniklých tečných složek reakcí mezi koly a vozovkou, který je na hřídel volantů přenesen přes čepy kol a převodku řízení.

3.3 Typy silových soustav

Silovou soustavou nazýváme soubor silových účinků (tj. sil a momentů) působících na konkrétní hmotný objekt (těleso, soustava těles). Z hlediska řešení úloh statiky je přitom důležité rozlišení soustav podle vzájemného směru a polohy sil v prostoru tj. *prostorové uspořádání sil*. Podle geometrického uspořádání nositelek v rovině a prostoru silové soustavy rozdělujeme na

obecné prostorové resp. rovinné soustavy, kde nositelky jsou mimoběžky resp. různoběžky

centrální prostorové a rovinné soustavy, kdy nositelky se protínají v jednom bodě (soustava vytváří tzv. svazek sil)

rovnoběžné prostorové resp. rovinné silové soustavy, kde nositelky jsou rovnoběžky. Zvláštním případem jsou spojitě rozložené silové soustavy, kde nositelky tvoří spojitou množinu rovnoběžných přímk v prostoru resp. v rovině

přímkové silové soustavy, kde všechny síly leží na jedné nositelce

Při rozboru silových soustav a jejich účinků na tělesa se přitom zaměříme na tyto úlohy:

- a) jaký má silová soustava účinek v daném bodě hmotného objektu a jak se dá co nejjednodušeji charakterizovat její silový účinek v daném bodě
- b) jaké jsou podmínky ekvivalence silové soustavy s jinou silovou soustavou
- c) za jakých podmínek zůstávají hmotné objekty při silovém působení ve stavu mechanického klidu

4 Statická ekvivalence a rovnováha silových soustav.

4.1 Základní úlohy statiky v případě obecných silových soustav

Na daný hmotný objekt může ovšem působit více silových soustav, přitom každá z nich může způsobovat jiný mechanický pohyb tělesa. Z tohoto pohledu vyplývají ve staticce dvě základní úlohy

- a) kdy působící soustavy vyvolají stejný pohyb hmotného objektu - pak hovoříme o **statické ekvivalenci**
- b) kdy při působení silové soustavy nedojde ke změně pohybového stavu tělesa - pak hovoříme o **statické rovnováze**

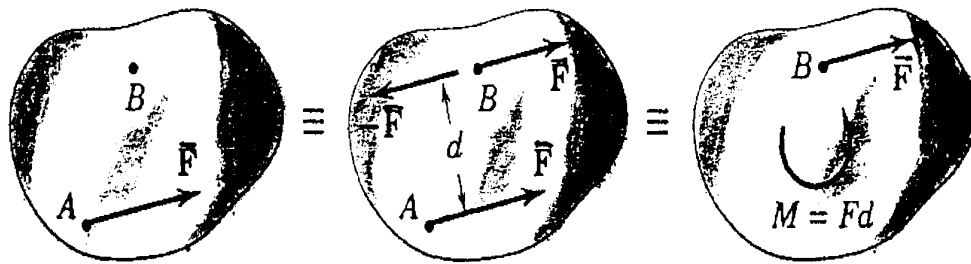
Obě úlohy jsou základními úlohami při vyšetřování silových soustav. Podle toho, zda jsou působící silové soustavy úplně nebo neúplně zadány se obě základní úlohy dělí na kontrolu nebo řešení statické ekvivalence či rovnováhy. Přitom budeme se budeme zabývat soustavami osamělých popř. spojitých sil a momentů jejichž vlastnosti jsme uvedli v kapitole 3. Z hlediska úloh týkajících se konkrétních problémů se přitom soustředíme na to

- 1) jaký má silová soustava účinek v daném bodě tělesa, jak se dá v daném bodě co nejjednodušeji nahradit
- 2) jak se dá daná silová soustava co nejvíce zjednodušit (např. jedinou silou)
- 3) jaké jsou podmínky pro ekvivalenci jedné silové soustavy s jinou silovou soustavou
- 4) jaké musí být splněny podmínky, aby těleso při působení dané silové soustavy zůstalo nepohyblivé tj. kdy je těleso v rovnováze

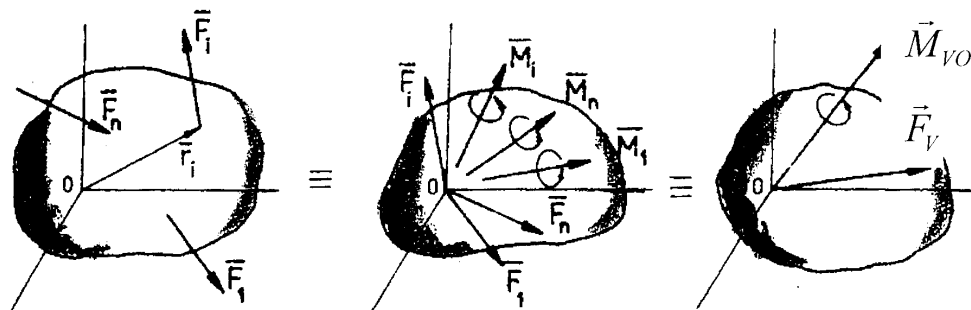
4.2 Nahrazení silových soustav v daném bodě

Pod pojmem statická ekvivalence 2 silových soustav budeme dále rozumět to, že při jejich působení bude stejný klidový pohybový stav tělesa nebo soustavy těles (tj. tzv. statická pohybová ekvivalence) a stejné hodnoty charakteristik silového působení ve vazbách (tj. tzv. statická vazbová ekvivalence).

V určitých případech je účelné přesunout sílu \vec{F} působící v bodě do nového působiště v bodě B, které neleží na nositelce síly \vec{F} . Mluvíme o přenesení síly na rovnoběžku. Úlohu můžeme řešit pomocí axiomu o statické ekvivalenci dvou silových soustav: *Dvě silové soustavy jsou staticky ekvivalentní, jestliže se liší o soustavu nulového vektoru* (tj. vektor jehož výslednice i výsledný moment je nula). Připojíme-li v bodě B rovnovážnou silovou soustavu $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$, jejichž nositelka je rovnoběžná s nositelkou síly \vec{F} působící v bodě A (obr. 4.1), pak síla působící v bodě A a síla $-\vec{F}$ působící v bodě B vytváří doplňkovou silovou dvojici o velikosti $M = Fd$, vektor této silové dvojice je kolmý na \vec{F} . Zbylá síla \vec{F} působící v bodě B vyvolává posuvný účinek (např. namáhá hřídel na ohyb). Tento postup se dá zobecnit. Jakoukoliv silovou soustavu tvořenou diskrétními silami \vec{F}_i s různými působišti A_i můžeme tedy převést na soustavu sil se společným působištěm a doplňkovými silovými dvojicemi. Síly můžeme sečíst do výslednice \vec{F}_V a doplňkové silové dvojice můžeme sečíst do výsledného momentu \vec{M}_{VO} (obr. 4.2).



Obr. 4.1:



Obr. 4.2:

Každou obecnou prostorovou silovou soustavu působící v libovolných bodech tělesa můžeme tedy nahradit v dané bodě *O* ekvivalentní silou \vec{F}_V a ekvivalentní silovou dvojicí \vec{M}_{VO} . V daném bodě *O* lze tedy libovolnou silovou soustavu charakterizovat z hlediska posuvných účinků pomocí *silovslednice* \vec{F}_V

$$\vec{F}_V = \sum \vec{F}_i \quad (4.11)$$

a z hlediska rotačních účinků pomocí momentové výslednice

$$\vec{M}_{VO} = \sum \vec{M}_{iO} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (4.12)$$

Soustavu vytvořenou z vektorů \vec{F}_V a \vec{M}_{VO} budeme dále nazývat *výslednicovou silovou soustavou* $\pi_V = \{F_V, M_{VO}\}$. Obecně vektory \vec{F}_V a \vec{M}_{VO} nejsou ani kolineární ani nejsou na sebe kolmé.

Jestliže pro libovolný vztahový bod B pro obecnou silovou soustavu platí, že $\vec{F}_V \cdot \vec{M}_{VB} = 0$, pak je možné provést tzv. *úplné nahrazení* tj. nalézt takový bod C pro který $M_{VC} = 0$ a výslednicová soustava je tvořena jen výslednicí procházející tímto bodem tj. $\pi_V = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VC} = 0\}$. Nositelka takto položené výslednice se pak nazývá *osa silové soustavy*. Vzhledem k tomu, že v případě rovinných soustav jsou vektory sil a momentů na sebe kolmé, pro rovinné soustavy je možné provést úplné nahrazení vždy.

Jestliže nositelky všech sil prochází jedním bodem P tvoří taková skupina sil centrální prostorovou resp. *centrální rovinou soustavu (svazek sil)*. Pro centrální silové soustavy je výsledný moment vzhledem k průsečíku nositelek vždy roven nule při libovolných hodnotách působících sil. V tomto případě tedy vzhledem ke společnému průsečíku P je výslednicová soustava tvořena také jen jedinou silou procházející průsečíkem nositelek tj. $\pi_V = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VP} = 0\}$.

Zvláštní případem jsou pak soustavy, pro které $F_V = 0$. V tomto případě je momentová výslednice pro všechny body prostoru stejná a je rovna momentu silové dvojice tj. platí $\pi_V = \{0, \vec{M}_{VO}\} = \{0, \vec{M}\}$. Takové soustavy pak nazýváme *soustavy točivé*.

4.3 Ekvivalence silových soustav

Jak vyplývá z předchozího odstavce, libovolnou silovou soustavu působící na hmotný objekt je možné redukovat na soustavu síla-silová dvojice v daném bodě. Tato ekvivalentní soustava *síla-silová dvojice* úplně charakterizuje účinek původní silové soustavy působící na hmotný objekt. Dvě silové soustavy jsou tedy zřejmě staticky ekvivalentní jestliže se shodují jejich redukce do výslednicové soustavy síla-silová dvojice k určitému bodu. Jak vyplývá ze vztahů (4.1) a (4.2), dvě silové soustavy $\pi_1 = \{A_i, \vec{F}_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ a $\pi_2 = \{A_j, \vec{F}_j\}$ $j = 1, 2, \dots, m$ jsou *staticky ekvivalentní* tehdy a jen tehdy jestliže součet sil (tj. posuvný účinek) a zároveň součet momentů (rotační účinek) obou soustav k libovolnému danému bodu B je stejný. Z matematického hlediska je tedy nutnou a postačující podmínkou pro dvě ekvivalentní soustavy vztah

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 = \sum \vec{F}_j \cap \sum \vec{M}_{iB} = \vec{M}_{VB}^{(1)} = \vec{M}_{VB}^{(2)} = \sum \vec{M}_{jB} \quad (4.13)$$

což slovně můžeme vyjádřit větou: Dvě silové soustavy jsou π_1 a π_2 jsou staticky ekvivalentní, jestliže mají současně stejnou výslednici a stejný výsledný moment k libovolnému bodu B . V tomto případě obě soustavy při působení na hmotný objekt vyvolávají stejný pohyb objektu jako celku tj. stejnou translaci a stejnou rotaci.

4.4 Rovnováha silových soustav

Zvláštním případem je pak případ, kdy výslednicová silová soustava má nulovou výslednici a zároveň nulový výsledný moment k libovolnému bodu O tj. platí a zároveň

$$\vec{F}_V = \sum \vec{F}_i = \vec{0} \text{ a zároveň } \vec{M}_{VO} = \sum \vec{M}_{iO} = \vec{0} \quad (4.14)$$

Taková silová soustava tvoří tzv. **rovnovážnou silovou soustavu** a při jejím působení na těleso je toto těleso v tzv. *stavu statické rovnováhy* tj. zůstává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném (tj. s konstantní rychlostí).

Poznámka 1: Rovnice statické rovnováhy a statické ekvivalence byly zavedeny pro libovolný vztažný bod. Z toho ovšem vyplývá, že jsou-li podmínky statické rovnováhy resp. statické ekvivalence splněny pro jeden bod prostoru, pak jsou splněny i pro libovolné další body prostoru.

Poznámka 2: Točivou silovou soustavu lze uvést do rovnováhy nikoliv silou ale pouze jen silovou dvojicí. Naopak svazek sil je možné uvést do rovnováhy jen silou.

5 Podmínky pro statickou ekvivalenci a rovnováhu.

5.1 Statické podmínky pro obecné silové soustavy

Pro zjednodušení zápisu si zavedeme pojem *silový účinek (silový bivektor)* \mathbf{S}_O , který bude zároveň charakterizovat jak posuvný tak i rotační účinek síly na těleso a který vyjádříme jako sloupcovou matici utvořenou ze souřadnic vektorů \vec{F} a \vec{M}_o tj.

$$\mathbf{S}_O = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Pak pokud \mathbf{S}_{O1} reprezentuje výslednicovou souřadnou soustavu π_1 a \mathbf{S}_{O2} výslednicovou souřadnou soustavu π_2 , pak statickou ekvivalenci resp. statickou rovnováhu můžeme symbolicky vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{S}_{O1} \pm \mathbf{S}_{O2} = 0 \quad (5.16)$$

kde znaménko (+) platí pro rovnovážný stav při současném působení obou silových soustav, znaménko (-) pro ekvivalenci obou rovinných soustav. První případ je zpravidla reprezentován úlohou, kdy soustava p1 představuje soustavu vnějších působících silových účinků a soustava p2 je soustavou složenou z reakčních sil a z reakčních momentů. Druhý případ je např. reprezentován úlohou nalezení výslednicové souřadné soustavy k danému bodu (tj. nalezení charakteristik působících silových účinků v daném bodě).

V případě **prostorových silových soustav** tj. jestliže nositelky sil jsou rozloženy v prostoru tedy máme při úloze na statickou ekvivalenci (tj. ke zjištění výslednicové silové soustavy v daném bodě popř. pro ověření ekvivalence 2 silových soustav) k dispozici 6 algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} F_{vx}^{(1)} &= \sum F_{ix} = \sum F_{jx} = F_{vx}^{(2)} \\ F_{vy}^{(1)} &= \sum F_{iy} = \sum F_{jy} = F_{vy}^{(2)} \\ F_{vz}^{(1)} &= \sum F_{iz} = \sum F_{jz} = F_{vz}^{(2)} \\ M_{OVx}^{(1)} &= \sum M_{Oix} = \sum M_{Ojx} = M_{OVx}^{(2)} \\ M_{OVy}^{(1)} &= \sum M_{Oiy} = \sum M_{Ojy} = M_{OVy}^{(2)} \\ M_{OVz}^{(1)} &= \sum M_{Oiz} = \sum M_{Ojz} = M_{OVz}^{(2)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Prvé tři rovnice se nazývají *silové (složkové) rovnice statické ekvivalence*, zbývající tři rovnice jsou *momentové rovnice statické ekvivalence*. Nezávislost statické podmínky na poloze

vztažného bodu a na volbě souřadnicového systému vede k tomu, že pouze k jednomu vztažnému bodu a jednomu souřadnému systému tvoří statické podmínky soustavu 6 nezávislých algebraických rovnic. Statické podmínky k dalším bodům a jiným souřadnicovým systémům nedávají tedy z hlediska studované úlohy nic nového, vše je zahrnuto v podmínce k jednomu vztažnému bodu a k jednomu souřadnému systému. Protože vztažný bod lze volit libovolně, bývá vhodné a účelné jej volit jako počátek souřadnicové systému. Statické podmínky vytvořené ve tvaru (5.3) k počátku souřadnicového systému budeme dále nazývat *základní tvar statických podmínek*. Označíme - li počet statických silových podmínek ν_F a počet momentových podmínek ν_M , pak pro celkový počet neznámých silových účinků platí:

$$\nu = \nu_F + \nu_M \quad (5.18)$$

V základním tvaru pro obecnou silovou soustavu je

$$\nu = 6, \quad \nu_F = 3, \quad \nu_M = 3 \quad (5.19)$$

Rovnice přitom mají jednoduchý fyzikální význam. Vyjadřují, že dvě silové soustavy jsou ekvivalentní tehdy, jestliže při působení na stejný hmotný objekt a za přítomnosti stejných vazeb vyvolávají stejné pohyby ve směru souřadných os x, y, z a stejnou rotaci vzhledem k osám x, y, z . V případě že nositelky všech sil leží v jedné rovině (x, y) pak takovou soustavu sil nazýváme **rovinnou soustavou**. Pro její nahrazení můžeme pro bod O ležící v rovině (x, y) použít 3 rovnice skalární

$$\begin{aligned} F_{vx}^{(1)} &= \sum F_{ix} = \sum F_{jx} = F_{vx}^{(2)} \\ F_{vy}^{(1)} &= \sum F_{iy} = \sum F_{jy} = F_{vy}^{(2)} \\ M_{Ovz}^{(1)} &= \sum M_{Oiz} = \sum M_{Ojz} = M_{Ovz}^{(2)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Opět první dvě rovnice se nazývají rovnice silové, zbývající rovnice je momentová. Leží-li vztažný bod O v rovině sil, pak momenty od jednotlivých sil i moment od jejich výslednice jsou vektory kolmé na rovinu sil. Při obecném zatížení jak diskrétními silami tak i spojitým silovým zatížením nás často zajímá posuvný resp. rotační účinek v daném bodě tj. *řešení úlohy na ekvivalenci k danému bodu*. V případě současného působení spojitého silového působení (objemového, plošného a liniového) a diskrétně působících sil příslušnou silovou výslednici určíme ze vztahu

$$\vec{F}_V = \int_{\Omega} \vec{o} dV + \int_{\Gamma} \vec{p} dS + \int_{\gamma} \vec{q} dl + \sum \vec{F}_i \quad (5.21)$$

a momentovou výslednici k bodu B od spojitého silového i diskrétního silového zatížení určíme ze vztahu

$$\vec{M}_{VB} = \int_{\Omega} (\vec{r}_o \times \vec{o}) dV + \int_{\Gamma} (\vec{r}_p \times \vec{p}) dS + \int_{\gamma} \vec{r}_q \times \vec{q} dl + \sum \overrightarrow{BA}_i \times \vec{F}_i \quad (5.22)$$

Př.5.1. Pro spojitě zatížený nosník podle obr.3.5 určete velikost a polohu výslednice svisle působících gravitačních sil. Řešení: Zatížení nosníku vahou nadloží narůstá se vzdáleností od levého kraje A podle funkce $q_1(x) = \frac{200}{3}x$ [N/m]. Pro výslednici tedy podle vztahu platí

$$F_{1V} = \int_0^L dF_{q_1} = \int_0^L q_1(x) dx = \int_0^3 \frac{200}{3}x dx = 300[N]$$

Velikost výsledného momentu od spojitěho zatížení gravitačními silami vzhledem k bodu A opět dostaneme integrací momentů od elementárních sil liniového zatížení tj.

$$M_{1VA} = \int_0^L x dF_{q_1} = \int_0^L x q_1(x) dx = \int_0^3 x \frac{200x}{3} dx = \frac{200}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 600 [N.m]$$

Uvažovaná soustava sil spojitěho liniového zatížení je rovinná. Podle výsledků kapitoly 4, takovou soustavu je možné nahradit jedinou silou \vec{F}_{1V} . Přitom aby výslednicová souřadná soustava byla staticky ekvivalentní s původní soustavou spojitěho zatížení $\{\vec{q}_1(x), \vec{M}_{1VA}\}$ musíme výslednici \vec{F}_{1V} umístit do takové vzdálenosti x_1 od bodu A aby hodnota momentu $\vec{M}_{F_{1V}A}$ od takto položené výslednice měla stejnou velikost jako momentu \vec{M}_{1VA} od původního spojitěho zatížení tj. musí platit:

$$F_{1V} x_1 = M_{1VA} \Rightarrow x_1 = \frac{M_{1VA}}{F_{1V}} = \frac{\int_0^L x q_1(x) dx}{\int_0^L q_1(x) dx} = \frac{600}{300} = 2 [\text{m}] \quad (5.23)$$

Poznámka: V případě nespojitostí zadaných spojitých zatížení, vzhledem k aditivnosti integrálu můžeme naznačené integrace po úsecích podél kterých je zatížení spojitě a výsledek následně sečíst.

Zvláštní případ nastává, jestliže pro silovou a momentovou výslednici soustavy působící na těleso platí:

$$\vec{F}_V = \vec{0} \cap \vec{M}_V = \vec{0} \quad (5.24)$$

Z hlediska pohybového stavu tělesa v tomto případě platí

$$m\vec{v} = \overrightarrow{\text{konst.}} \cap J\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{konst.}} \quad (5.25)$$

a říkáme, že těleso je při působení takové silové soustavy ve *statické rovnováze*. V prostoru vektorové rovnice (5.8) opět reprezentují 6 rovnic algebraických

$$\begin{aligned}
\sum F_{ix} &= 0 \\
\sum F_{iy} &= 0 \\
\sum F_{iz} &= 0 \\
\sum M_{Oix} &= 0 \\
\sum M_{Oiy} &= 0 \\
\sum M_{Oiz} &= 0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

a v rovině 3 rovnice algebraické

$$\begin{aligned}
\sum F_{ix} &= 0 \\
\sum F_{iy} &= 0 \\
\sum M_{Oiz} &= 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Př. 5.2 Zjistěte při jaké hodnotě konstantního spojitého silového působení w a při jaké šířce d pravé opory nosníku uloženého podle obr (3.5) bude nosník v rovnováze.

Řešení: Podle výsledku příkladu 5.1 výslednice tíhového zatížení je rovna $F_{1V} = 300[\text{N}]$ a výsledný moment od tíhového zatížení vzhledem k levému okraji levého nosníku tj. k bodu A je $M_{q_1A} = [600 \text{ N.m}]$. Tuto soustavu $\pi_1 = \{300[\text{N}], 600[\text{N.m}]\}$ máme tedy uvést do rovnováhy silovou soustavou π_2 skládající se ze dvou liniových zatížení o konstantních intenzitách $q_2 = 75[\text{N/m}]$ resp. $q_3 = w = \textit{konst.}$ působících na nosnících o šířkách $l_2 = 0,5[\text{m}]$ resp. $l_3 = d$.

Velikost výslednice F_{2V} soustavy π_2 je podle vztahu (5.6) dána vztahem

$$F_{2V} = \int_0^L [q_2(x) + q_3(x)] dx = \int_0^{0,5} (75,0 [\text{N/m}]) dx + \int_{3,0-d}^{3,0} w dx = 37,5 [\text{N}] + w \cdot d \tag{5.28}$$

Podobně velikost momentu od výslednicové soustavy π_2 vzhledem k bodu A je podle vztahu (5.7)

$$M_{2VA} = \int_0^L [x q_2(x) + x q_3(x)] dx =$$

$$= \int_0^{0,5} (75,0 \text{ [N/m]}) x dx + \int_{3,0-d}^{3,0} w x dx = 9,375 \text{ [N.m]} + \frac{9,0w}{2} - \frac{(3,0-d)^2 \cdot w}{2} \quad (5.29)$$

Ze silové podmínky pro rovnováhu ve směru osy y tedy platí:

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 : \quad -300,0 \text{ [N.m]} + 37,5 \text{ [N.m]} + w \cdot d = 0$$

Z momentové podmínky statické rovnováhy tedy dostáváme vztah

$$\sum M_A = 0 : \quad -600,0 \text{ [Nm]} + 9,375 \text{ [Nm]} + \frac{9,0w}{2} - \frac{(3,0-d)^2 \cdot w}{2} = 0$$

Řešením této soustavy 2 rovnic dostáváme hodnoty $d = 1,5 \text{ [m]}$, $w = 175 \text{ [N/m]}$.

5.2 Statické podmínky pro centrální silové soustavy

Počet nezávislých rovnic statické rovnováhy v prostoru $mu = 6$ resp. v rovině $mu = 3$ rovnic je použitelný jen pro případ obecných prostorových resp. obecných rovinných soustav. Pro centrální silové soustavy je momentová podmínky rovnováhy vzhledem k průsečíku nositelek *splněna triviálně* tj. moment vzhledem k průsečíku nositelek je roven nule při libovolných hodnotách působících sil. Z tohoto důvodu jsou v případě centrálních silových soustav momentové rovnice pro úlohu na statickou rovnováhu resp. ekvivalenci nepoužitelné a pro řešení úloh můžeme použít jen podmínky silové. Úlohy na rovnováhu nebo ekvivalenci mohou tedy obsahovat v prostoru resp. v rovině nejvýše 3 resp. 2 neznámé silové parametry.

Poznámka: V případě centrálních silových soustav by sice bylo možné konstruovat nenulové podmínky vzhledem k jiným bodům než je průsečík nositelek. Je však zřejmé, že tyto momentové podmínky závisí na podmínkách silových a neposkytují tedy další informace o problému a nelze je tedy použít.

5.3 Modifikace statických podmínek rovnováhy a ekvivalence

Rovnice statické rovnováhy resp. ekvivalence napsané pomocí vztahů (5.3), (5.4), (5.12) a (5.11) jsou v tzv. *základním tvaru* platném pro kartézské souřadné systémy. Složkové resp. momentové rovnice však můžeme rozepsat i do os resp. směrů které nejsou osami kartézského souřadného systému tj. nemusí být na sebe kolmé. Platí tedy věty:

Kteroukoliv ze silových statických podmínek k osám x,y,z lze zaměnit silovou podmínkou k nezávislé ose p .

Kteroukoliv z momentových statických podmínek k osám x,y,z lze zaměnit silovou podmínkou nezávislé ose p .

Dále obecně platí, že kteroukoliv ze silových statických podmínek k osám x,y,z můžeme nahradit rovnicemi momentovými k jiným vztažným bodům popř. k jiným vztažným osám tj. můžeme provést tzv. *modifikaci základních statických podmínek*. Při aplikaci náhrad silových

podmínek podmínkami momentovými však systém rovnic musí zůstat nezávislý. Z tohoto důvodu se např. 6 vztažných os nesmí protínat v jedné přímce, momentové osy nesmí ležet v jedné rovině nebo v rovinách rovnoběžných, při ponechání jedné silové podmínky nově uvažované vztažné body nesmí ležet na přímce rovnoběžné s osou použitou pro silovou podmínku apod. Platí tedy:

Silové podmínky k osám x, y, z lze zaměnit podmínkami momentovými k nezávislým osám.

Opačný postup však již možný není tj. platí:

Rovnice momentové nelze nahrazovat podmínky silovými vzhledem k dalším osám

Tyto věty tedy můžeme pro obecnou prostorovou soustavu shrnout do relací:

$$\nu = 6, \quad \nu_F \leq 3, \quad \nu_M \geq 3, \quad \nu_F + \nu_M = 6$$

Pro aplikaci momentových podmínek je účelné vybírat vztažné body cíleně tak, aby byl minimální počet nenulových působících momentů popř. aby se v jednotlivých momentových podmínkách vyskytovalo co nejméně neznámých sil. To vede ke zmenšení počtu neznámých vyskytujících se v jednotlivých statických rovnicích a vytvořené soustavy rovnic jsou potom snadněji řešitelné.

5.4 Statická určitost

Z uvedených statických rovnic nahrazení nebo rovnováhy pro jednotlivé silové soustavy hledáme u působících soustav neznámé parametry silových účinků. Nejčastěji se zabýváme úlohami statické rovnováhy tj. situací kdy je hmotný objekt ve stavu mechanického klidu čili soustava která na něj působí je soustavou rovnovážnou. Z rovnic statické rovnováhy přitom můžeme určit právě tolik neznámých parametrů silových účinků, kolik je k dispozici pro danou soustavu použitelných podmínek rovnováhy. Termínem neznámé silové účinky přitom zpravidla rozumíme hodnoty velikostí vazebních sil nebo vazebních momentů. Podobně jako tomu bylo u svazku sil, při některých typech zatížení mohou být některé z rovnic statické rovnováhy splněny triviálně v důsledku zadání. Např. jestliže v některém směru nepůsobí žádné síly, pak je pro tento směr nepoužitelná silová podmínka podobně v případě zatížení jen od momentů silových dvojic jsou nepoužitelné všechny podmínky silové apod. Podle toho tedy musíme snižovat i počet použitelných statických rovnic (viz př. 5.2 kde byly jen 2 neznámé). Použitelné statické podmínky jsou tedy pouze všechny nezávislé a netriviální statické podmínky. Porovnáním počtu použitelných statických rovnic s počtem neznámých parametrů posuzujeme řešitelnost úlohy. Označíme-li n počet nezávislých rovnic statické rovnováhy resp. statické ekvivalence a m počet neznámých pak

- 1) úloha je *staticky určitá*, jestliže je splněna podmínka $\nu = \mu$ a zároveň $\nu \leq \mu$. Úloha je řešitelná metodami statiky.
- 2) úloha je *staticky neurčitá*, jestliže $\nu < \mu$ to soustava statických podmínek obsahuje méně rovnic než je neznámých. Aby bylo možné všechny neznámé určit, musela by být soustava n statických podmínek doplněna dalším počtem $(\nu - \mu)$ rovnic, které vyplývají z jiných fyzikálních zákonů (např. z rovnic pro deformaci těles-viz pružnost a pevnost). Pokud chceme úlohu řešit v rámci statiky, je nutné změnit zadání (např. upravíme počet vazeb tak, aby se snížil počet neznámých vazebních silových účinků).

- 3) úloha je *staticky přeuročena*, je-li $\nu > \mu$. Soustava je pohyblivá a stanovení důsledků silového působení se v tomto případě řeší v rámci dynamiky. Aby proto úlohy tohoto typu mohly být řešeny v rámci statiky, je nutné doplnit soustavu působících sil o další síly nebo momenty (tzv. *přídavné zátěžné silové účinky*), které zabrání případným možným pohybům silově. Mohou to však také být souřadnice určující rovnovážné polohy (*přídavné parametry polohové*). Přídavných parametrů přitom musí být právě tolik, o kolik je méně neznámých než rovnic.

V některých speciálních případech (u tzv. výjimečném uložení těles) můžou v systému neznámých m_u existovat vnitřní závislosti. Takové případy nastávají jestliže se např. nositelky neznámých sil protínají v jednom bodě, leží na rovnoběžných nositelkách nebo mají společnou nositelku apod. Jiný případ neurčitosti zase může vzniknout tím, že počet neznámých hodnot velikosti momentů ν_M převyší počet použitelných momentových rovnic μ_M - např. v rovině při vazbě tělesa dvěma posuvnými kinematickými dvojicemi a jeho namáhání od dvou silových dvojic můžeme použít jen jednu podmínku momentovou (momentová podmínka v případě zatížení tělesa silovými dvojicemi je pro všechny vztažné body stejná!) a silové podmínky jsou splněny triviálně. V těchto výjimečných případech tedy úloha může být staticky neurčitá nebo staticky přeuročena popř. ne všechny neznámé lze určit jednoznačně i při stejném počtu neznámých a počtu základních rovnic statické rovnováhy. Tyto zvláštní případy budou podrobněji rozebrány v kapitole o uložení těles.

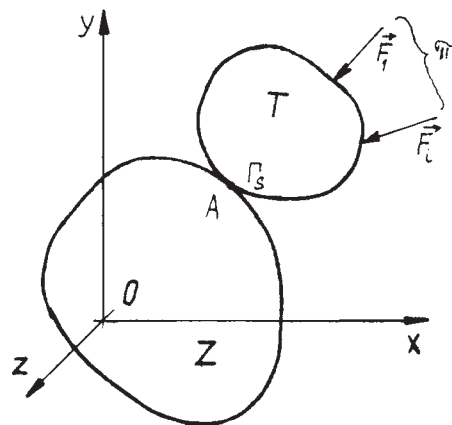
6 Styk těles

6.1 Styk těles a geometrie styku

Jak jsme vysvětlili v předchozím textu, pro strojírenské objekty je charakteristické, že to jsou soustavy těles vázaných stykovými a silovými vazbami. Proto převažujícími úlohami mechaniky těles jsou úlohy vztahující se k vázanému tělesu. Ve staticce především úlohy týkající se určení silových soustav působících na nepohyblivě uložené těleso, případně návrh nepohyblivého staticky určitého uložení tělesa.

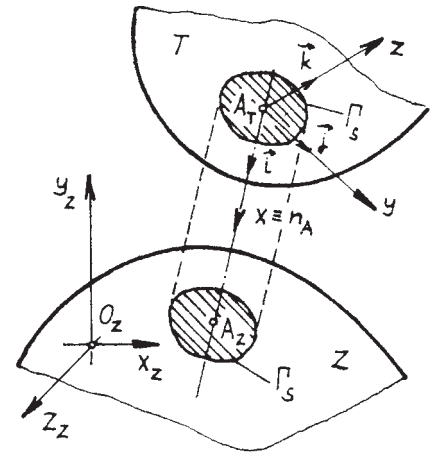
Prvním krokem řešení těchto úloh je správné uvolnění jednotlivých vazeb a tělesa. Proto před konkrétním výkladem o řešení statických úloh rozebereme podrobně styk těles, uvolnění stykových vazeb a stykové síly.

Uvažujme soustavu dvou těles T a Z těchto vlastností viz obr. 6.1. Těleso Z je základním tělesem ve smyslu vymezení prostoru na strojírenské rozlišovací úrovni. V souladu s axiomem **A1** a odst. 1.6 má tyto vlastnosti - jako celek je nepohyblivé a nezávislé na mechanickém působení okolních těles. Ve strojírenství vlastnosti základního tělesa z hlediska řešeného problému má často základ nebo rám stroje, případně těleso s obdobnou funkcí. Těleso Z zaujímá prostorovou oblast Ω_z .



Obr. 6.1:

Těleso T zaujímající prostorovou oblast Ω_T , je ve styku pouze se základním tělesem Z vazbou A . Silové vazby tělesa T s okolím jsou vyjádřeny soustavou sil π . Pohyb tělesa T je omezen pouze vazbou A a ovlivněn vazbou A a silovými vazbami. Styk těles se uskutečňuje ve stykové útvary $\Gamma_s = \Omega_T \cap \Omega_Z$, tedy prostorovém útvaru, který současně zaujímají obě tělesa. Vzhledem k základním vlastnostem tělesa, odst. 3.1, má společná oblast Γ_s jen malou, na strojírenské rozlišovací úrovni nerozlišitelnou tloušťku, jako důsledek neprostupnosti těles. U zatíženého styku je Γ_s vždy plošnou oblastí. Z modelového hlediska může být jednodušší část křivky nebo bod.



Obr. 6.2:

Popsané vlastnosti styku označíme jako **1. charakteristiku styku**.

Stykovým útvarem Γ_s při styku těles, je oblast, která není oblastí trojrozměrnou.

Z uvedených vlastností je zřejmý význam relace:

$$A \in \Gamma_s \implies A_T \in \Omega_T \wedge A_Z \in \Omega_Z \wedge A \equiv A_T \equiv A_Z \quad \text{viz obr. 6.2}$$

V bodě $A \in \Gamma_s$ zvolíme kartézský souřadnicový systém tak, že:

- osa x je totožná s normálou n_A stykového útvaru Γ_s v A , tedy $x \equiv n_A$ a její kladná orientace je ven z tělesa T (říkáme, že x má orientaci vnější normály)
- osy y, z leží v tečné rovině ke Γ_s v bodě A .

Relativní rychlost bodu A vyjádříme jako rozdíl rychlostí bodů tedy

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_T} - \vec{v}_{A_Z} \quad (6.1)$$

Vzhledem k vlastnostem základního tělesa je $\vec{v}_{A_Z} = \vec{0}$. Odtud můžeme psát

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_T} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_n \vec{i} + v_t \vec{t} \quad (6.2)$$

Z neprostupnosti těles vyplývá, že tělesa T a Z nemohou do sebe prostupovat, což znamená, že v každém bodě styku $v_n \leq 0$. Jestliže $v_n < 0$ pak dochází k oddělení bodů A_T a A_Z tedy ke zrušení styku v bodě A .

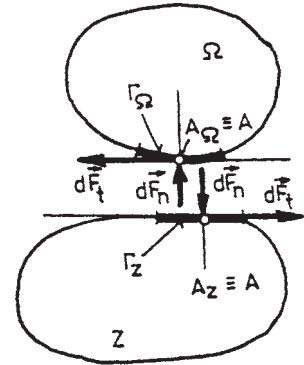
Popsané vlastnosti označíme jako **2. charakteristiku styku**.

Při styku těles v každém bodě $A \in \Gamma_s$, stykového útvaru Γ_s platí

$$v_n = 0$$

Styk těles v bodě A končí, jestliže $v_n < 0$.

Z axiomu o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení **A5 a-d** vyplývá: Ovlivní-li nebo omezí-li vazba A mechanický pohyb tělesa, pak dochází ve vazbě k silovému působení a deformaci tělesa, proto stykový útvar Γ_s je plošnou oblastí s rozloženým silovým působením \vec{p}_s . V bodě $A \in \Gamma_s$ zavedeme obdobně souřadnicový systém jako při vyšetřování relativní rychlosti v bodě A. Pak pro elementární stykovou sílu $d\vec{F}_s$ platí



Obr. 6.3:

$$d\vec{F}_s = \vec{p}_s dS = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t = (p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}) dS = (p_n \vec{i} + p_t \vec{t}) dS \quad (6.3)$$

Soustava elementárních stykových sil $d\vec{F}_s$ pro všechna δ okolí bodů $A \in \Gamma_s$ tvoří silovou soustavu π_s . Podle hodnoty stykového tlaku p_s v bodech $A \in \Gamma_s$ budeme rozeznávat:

- nezatížený styk** - styk v bodě A nastal, tedy $A \equiv A_T \equiv A_Z$, ale $p_s = 0$
- zatížený styk** - styk v bodě A nastal a $p_s \neq 0$

Podle hodnoty p_s ve stykovém útvaru budeme rozlišovat:

- **stykový útvar nezatížený** - ve všech bodech $A \in \Gamma_s$ stykového útvaru je $p_s = 0$
- **stykový útvar zatížený** - ve všech bodech $A \in \Gamma_s$ stykového útvaru je $p_s \neq 0$
- **stykový útvar smíšený** - na části Γ_s je styk nezatížený, ve zbytku Γ_s je zatížený

Jak jsme již uvedli v důsledku silového působení dochází k deformaci tělesa, proto v případě zatíženého styku se tělesa v okolí stykového útvaru vždy deformují. Stykovým útvarem je plošná - obecná, kulová, válcová nebo rovinná oblast. Konkrétní tvar a rozměry Γ_s jsou závislé na:

- **geometrii a poloze těles v okamžiku styku t_s**
- **zatížení tělesa**
- **deformačních vlastnostech materiálů stýkajících se těles.**

V případě nezatíženého styku ($p_s = 0$) k deformaci tělesa v důsledku styku nedochází a proto stykový útvar Γ_s je určen pouze geometrií a polohou těles v okamžiku styku. Protože povrch tělesa může mít geometricky libovolný tvar, může být stykovým útvarem dvojrozměrná (plošná) nebo jednorozměrná (křivková) oblast, případně bod.

Popsané vlastnosti označíme jako **3. charakteristiku styku**.

Pro stykový útvar Γ_s těles platí:

V nezatíženém styku je Γ_s dána geometrií a polohou těles v okamžiku styku t_s .

V zatíženém styku je Γ_s vždy plošnou oblastí určenou

$\Gamma_s = \Gamma_s(\text{geometrie, poloha v } t_s, \pi \cup \pi_s, \text{ materiál těles})$

Rozborem styku těles ve strojírenství se zjistilo, že změny stykového útvaru Γ_s při styku těles jsou v mnoha případech nepodstatné. Je to především v těch případech, kdy $\Gamma_s(t_s)$ nezatíženého styku je plocha. V řadě případů (např. valivá ložiska) je změna stykového útvaru podstatná. První skupina je jednoduchá v tom, že není třeba uvažovat změny stykové plochy, protože jsou nepodstatné. Proto podle změny stykového útvaru Γ_s můžeme styk těles rozdělit na:

neproměnný - změna stykového útvaru z hlediska řešeného problému je nepodstatná

proměnný - změna stykového útvaru je z hlediska řešeného problému podstatná

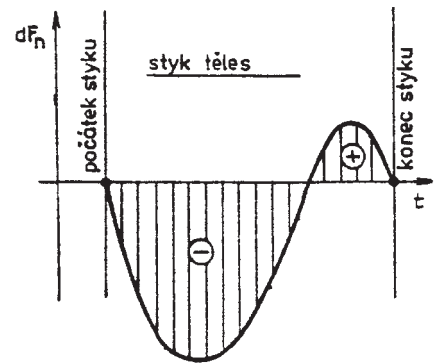
Popsané vlastnosti styku označíme jako **4. charakteristiku styku**.

Změna stykového útvaru Γ_s může být v průběhu zatěžování tělesa podstatná nebo nepodstatná z hlediska řešeného problému. Je-li změna stykového útvaru nepodstatná, pak styk nazveme neproměnným.

Z uvedeného vyplývá, že řešení podmínek v každém zatíženém nebo smíšeném styku je komplexní problém, který vyžaduje respektování pohybových, silových a deformačních hledisek. Je to problém, který se nazývá *kontaktním problémem*. Jeho řešení je vedle komplexnosti charakteristické ještě vysokou výpočtovou složitostí. Proto kontaktní problémy patří v mechanice těles k nejnáročnějším. V základním studiu se jich můžeme dotknout jen v nejjednodušších případech.

Při experimentálním vyšetřování styku reálných těles můžeme zjistit tyto závažné skutečnosti:

- a) Časový průběh elementární stykové síly dF_n od počátku do konce styku má průběh podle obr. 7.4, který vyjadřuje tuto známou skutečnost. Chceme-li od sebe oddálit dvě tělesa, která byla k sobě přitlačena, musíme vyvinout úsilí, které způsobí tahové síly ve stykové ploše (jsou orientovány ven z tělesa). Tyto tahové síly jsou časově proměnné. Jejich velikost závisí na celé řadě faktorů např. maximální hodnotě tlakové síly, době jejího působení, relativní rychlosti ve styku, kvalitě a charakteru povrchů, materiálu těles atd. Nejen ve strojírenské, ale i v každodenní praxi můžeme z hlediska velikosti tahových sil rozlišit dva typy stykových vazeb:



Obr. 6.4:

Rozebíratelné - tahová síla při rozpojování styku je malá. Na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatná.

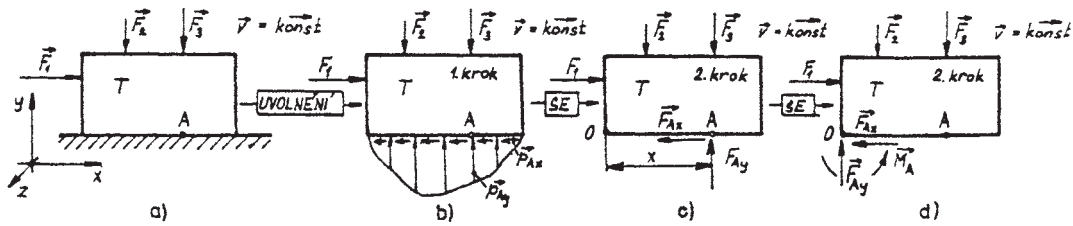
Nerozebíratelné - tahová síla má určitou hodnotu, která je buď funkční nebo může způsobit porušení funkce součásti.

Nejjednodušším stykem z hlediska hodnoty stykových sil je **tlakový styk**, u něhož v průběhu trvání styku jsou podstatné pouze tlakové stykové síly.

Popsané vlastnosti styku označíme jako **5. charakteristiku styku**.

Nejjednodušším stykem z hlediska stykových sil je rozebíratelný tlakový styk, který je charakterizován $p_n \leq 0$ ve všech bodech stykového útvaru Γ_s .

- b) Geometrie stykového útvaru ovlivňuje kolik a které složky pohybu tělesa jako celku jsou stykovou vazbou omezeny a které složky jsou pouze ovlivněny. Např. u rovinné jednostranné posuvné vazby viz obr. 6.5 je omezen posuv ve směru osy y a rotace kolem osy z . Posuv ve směru osy x je vazbou A pouze ovlivněn - je geometricky možný. Z každodenní



Obr. 6.5:

praxe víme, že posuv ve směru geometricky možného pohybu nastane, působí-li v tomto směru síla $\vec{F}_1 > \vec{0}$. Pohyb však nastane, jestliže síla \vec{F}_1 dosáhne jistou hodnotu, která charakterizuje hranici stability klidu. Působením síly $\vec{F}_1 > \vec{0}$ pohyb tělesa nastal, má-li pokračovat, \vec{F}_1 musí konat práci. Výkon síly \vec{F}_1 , který vyjádříme vztahem $\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_x > 0$ je z mechanického hlediska mařen ve styku, přeměnou na teplo. Tato změna je nevratná. Práce síly \vec{F}_1 je ve styku přeměněna nevratně na tepelnou energii, která nemůže být aktivní. Souhrnně můžeme tyto vlastnosti styku vyjádřit tvrzením.

Styk těles je klidově stabilní a energeticky nevratně pasivní.

Uvedené tvrzení vyjádřené vztahy označíme jako **6. charakteristiku**.

Má-li v bodě $A \in \Gamma_s$ nastat geometricky možný pohyb ve směru p pak musí platit:

$$\vec{F}_p > \vec{0} \text{ a } \vec{F}_p \cdot \vec{v}_p > 0 \quad \vec{F}_p \in \pi$$

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_{ip} - \text{složky silové soustavy } \pi \text{ ve směru } p.$$

Z uvedeného výkladu je zřejmé, proč vazba stykem pohyb tělesa nejen omezuje, ale i ovlivňuje. Důsledkem ovlivnění a omezení mechanického pohybu vazbou je charakter rozloženého silového působení ve stykovém útvaru Γ_s po uvolnění vazby. Silové působení má nejen složku \vec{p}_{Ay} ve směru normály v místě styku, ale také v složka \vec{p}_{Ax} tečném směru, jako důledek ovlivnění mechanického pohybu vazbou. Viz obr. 6.5

Nahrazení rozloženého silového působení z hlediska statické ekvivalence výsledným silovým působením ve vazbě je zobrazeno na obr. 6.5. V praxi při řešení konkrétních problémů můžeme z hlediska stability styku rozlišit dva typy vazeb. Vazby, u kterých je velikost síly \vec{F}_p charakterizující hranici stability klidu malá, případně na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatná a také energetická ztráta je nepodstatná. Existuje celá skupina problémů, kterými se lidé zabývají od nepaměti a jejichž cílem je minimalizace síly \vec{F}_p a energetické ztráty ve vazbě. Mezi tyto problémy patří konstrukce ložisek, konstrukce ozubených kol atd. Cílem je maximální pohyblivost vazby. Vedle těchto vazeb existují vazby, u nichž je z funkčního hlediska požadován klid. Např. brzdy, spojky atd. Z mechanického hlediska uvedené vlastnosti styku budeme nazývat.

Styk neutrální - oblast klidové stability i velikost ztrátové energie jsou natolik malé, že jsou na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatné. Proto pro vazbu s neutrálním stykem platí: Klidový stav geometricky možného pohybu ve směru p nastane, když $\vec{F}_p = \vec{0}$ a při pohybu platí $\vec{v}d\vec{F}_s = 0$.

Styk pasivní - klidový stav geometricky možného pohybu ve směru p je možný i když $\vec{F}_p \neq \vec{0}$.

Pohyb tělesa nastane, jestliže $\vec{F}_p > \vec{F}_h$, kde \vec{F}_h je hraniční síla klidové oblasti. Velikost ztrátové energie je podstatná. K pohybu tělesa je nutné, aby \vec{F}_p konala práci.

Vlastnosti styku těles z hlediska relativního pohybu, stykových sil, energetických poměrů ve styku jsou v současné době předmětem samostatné vědní disciplíny s názvem **tribologie**. Je to vědní disciplína, která se dotýká nejrůznějších oborů např. mechaniky, fyziky pevné fáze, hydrodynamiky, termomechaniky, chemie atd. Proto má mezioborový charakter. Není součástí mechaniky těles. Mechanice tribologie poskytuje modely a teorie vyjadřující vztah mezi silovým působením a relativním pohybem ve stykovém útvaru Γ_s . Těchto modelů pro konkrétní problémy existuje v současné době velké množství. Jednotlivé modely se liší rozlišovací úrovní, složitostí použitých algoritmů a rozsahem třídy problémů, pro které je lze použít. V základním studiu se můžeme zabývat jen modely a teoriemi, které mají charakter **nejjednodušších tribologických modelů**.

Shrneme-li dosavadní poznatky o vlastnostech styku z hlediska uvolňování stykových vazeb, pak vidíme, že uvolňování reálných stykových vazeb je problém obtížný a náročný, je však základním problémem při silovém přístupu řešení úloh mechaniky těles, proto jej musíme na odpovídající úrovni zvládnout i ve staticce.

Z pedagogického hlediska a časových možností se omezíme na vazby stykem s nejjednoduššími vlastnostmi, které mohou být u řady problémů modelem styku. Jsou to vazby, které označíme **NNTN a NNTP**.

Vazba NNTN je styková vazba, jejíž styk je charakterizován:

N - neprostupností, N - neproměnností, T - tlakovostí, N - neutrálností

Vazba NNTN je vazbou s nejjednodušším modelem styku, jestliže prostupnost, deformace, spojení těles, hranice klidové stability a ztrátová energie ve styku u skutečného styku jsou natolik malé, že jsou z hlediska řešeného problému nepodstatné.

Vazba NNTP je styková vazba, jejíž styk je charakterizován:

N - neprostupností, N - neproměnností, T - tlakovostí, P - pasivností.

Vazba NNTP je vazbou s nejjednodušším modelem styku, jestliže prostupnost, deformace a spojení těles jsou u skutečného styku nepodstatné, ale hranice klidové stability a ztrátová energie ve styku jsou podstatné.

Z teorie popisujících pasivní vlastnosti styku se budeme zabývat pouze Coulombovským třením a tuhým valením.

Důležitá poznámka:

Všeobecně se vazba NNTN označuje jako vazba bez pasivních odporů a vazba NNTP vazbou s pasivními odpory. Ostatní vlastnosti - neprostupnost, neproměnnost a tlakovost - styku se explicitně neuvádějí, ale intuitivně se uvažují. V současném pojetí vědy a techniky je nutné omezovat intuitivní složky a snažit se o explicitní vyjádření vlastností. To je důvodem zavedení značek NNTN a NNTP, kde jednotlivá písmena explicitně označují úroveň vyjádření vlastností skutečné vazby.

6.2 Silové a kinematické charakteristiky NNTN vazeb.

Z vymezení neprostupnosti, neproměnnosti, tlakovosti a neutrálního styku vyplývá:

1. **Neprostupnost** - složka relativní rychlosti bodu stykového útvaru $A \in \Gamma_s$ ve směru normály v bodě A je nulová $v_n = 0$.
2. **Neproměnnost** - stykový útvar Γ_s je určen geometrií těles a polohou těles na počátku styku. Známe-li geometrii a vzájemnou polohu těles v okamžiku styku je Γ_s určeno.
3. **Tlakovost** - v průběhu trvání styku jsou v každém bodě stykového útvaru podstatné pouze elementární **tlakové síly**. Tedy $\vec{p}_s \leq \vec{0}$, je orientován do tělesa.
4. **Neutrálnost** - klidový stav ve směru geometricky možného pohybu p nastane, jestliže $\vec{F}_p = \vec{0}$. Při pohybu je $\vec{F}_p \vec{v}_p = 0$.

Body 1-4 jsou konkrétním vyjádřením axiomu **A6** pro nejjednodušší možný typ vazby - vazby NNTN. Jsou teoretickým základem uvolňování stykových vazeb, který může být použitelnou teorií pro výpočtové modelování, jestliže odchylky řešeného problému od bodů 1-4 jsou nepodstatné. Ve strojírenství se tyto případy běžně vyskytují, pro ně je vazba NNTN výpočtovým modelem reálné vazby.

Obecně silové působení na stykovém útvaru má charakter rozloženého silového působení, které představuje neohrazený počet neznámých sil $d\vec{F}_s$. Proto i když máme úplně zadané těleso, soustavu π a známe statické chování tělesa, je určení stykových sil úlohou staticky neurčitou, neboť počet neznámých je větší než počet použitelných statických podmínek, kterých může být pro jedno těleso maximálně 6 ($\nu \leq 6$). Neznámé parametry silového působení ve styku můžeme určit ze statických podmínek pouze tehdy, je-li počet neznámých parametrů μ právě roven počtu použitelných statických podmínek $\nu \leq 6$. Je-li tato podmínka splněna, pak říkáme, že úloha je staticky určitá a to je principiálně možné v těchto případech:

1. Těleso je vázáno určitým (malým) počtem NNTN vazeb, kde Γ_s je bod.
2. Těleso je vázáno vazbami NNTN, kde Γ_s je spojitou oblastí. Rozložené silové působení ve styku nahradíme z hlediska statické ekvivalence neúplně určenou silovou a momentovou výslednicí viz obr. 63c, d, které budeme nazývat *stykové výslednice*.
3. Těleso je vázáno vazbami NNTN, kde Γ_s je spojitá oblast s rozloženým silovým působením \vec{p}_s , které na základě zkušeností s experimentálním a výpočtovým řešením kontaktních problémů aproximujeme funkcí s určitým malým počtem parametrů. Pak cílem statického řešení je určit hodnotu parametrů, a tím i tvar funkce, kterou nazýváme *stykovou funkcí*.

Ve staticce můžeme řešit úlohy jen staticky určité t.z. neznámé parametry silového působení určíme ze statických podmínek. Proto ve staticce můžeme řešit pouze úzkou třídu úloh, týkajících se stykových výslednic a stykových funkcí staticky určité uložených těles. Teprve v dalších předmětech můžeme tuto třídu úloh rozšířit, i když v základním studiu, jak jsme již vysvětlili, se nebudeme zabývat kontaktními problémy.

Proto si budeme uvědomovat:

V základním studiu, jehož je i statika, se omezíme na úlohy o stykových výslednicích a stykových funkcích.

Z výkladu od počátku skript by mělo být zřejmé, že změna mechanického pohybu tělesa a silové působení na těleso tvoří dvě strany jedné mince, protože silové působení je mírou změny mechanického pohybu. Proto styk těles má z mechanického hlediska dvě stránky:

- **kinematickou** - která vystihuje omezení a ovlivnění složek mechanického pohybu stykem
- **silovou** - která popisuje silové působení ve styku

Jestliže pro styk můžeme použít model NNTN styku, pak deformace stykového útvaru v průběhu zatěžování je nepodstatná a pohyb tělesa vzhledem k základnímu nebo jinému tělesu je pak jednoznačně určen translačním pohybem libovolného bodu B a rotačním pohybem kolem bodu B, což na základě znalostí z fyziky můžeme vyjádřit takto:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{C}B \quad (6.4)$$

kde \vec{v}_c - je rychlost libovolného bodu tělesa T.

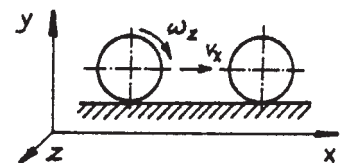
Pohybový stav tělesa T je tedy určen bivektorem $\{\vec{v}, \vec{\omega}\}_B$, jehož souřadnicový tvar maticově zapíšeme takto:

$$\mathbf{v}_B = \left[v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \right]_B^T$$

Ve staticce se pohybem zabýváme pouze kvalitativně, proto k matici \mathbf{v}_B přiřadíme logickou matici pohyblivosti \mathbf{k}_v takto: je-li prvek v_i matice \mathbf{v}_B

nezávislý	geometricky možný	$k_i = 0$
nezávislý	geometricky nemožný	$k_i = 1$
	řídící (geometricky možný)	$k_i = 0$
závislý		
	řízený (geometricky nemožný)	$k_i = 1$

Nyní si vysvětlíme závislost složek pohybu tělesa jako celku. Představme si váleček podle obrázku 6,6. Složka pohybu $v_y = 0$ není geometricky možná. Složky v_x, ω_z jsou geometricky možné. Pokud se váleček bude odvalovat, pak složky v_x a ω_z jsou lineárně závislé, přičemž závislost můžeme vyjádřit vztahem $v_x = r \cdot \omega_z$. Pohyb válečku můžeme popsat pohybem v rovině (x,y), maticí $\mathbf{v}_s = [v_x, v_y, \omega_z]_s^T$.



Obr. 6.6:

Matice pohyblivosti bude mít tvar

$\mathbf{k}_v = [0 \ 1 \ 1]$ - jestliže řídící je posuv ve směru x, nebo

$\mathbf{k}_v = [1 \ 1 \ 0]$ - jestliže řídící je rotace kolem osy z.

Silové působení z hlediska silových výslednic je v souladu s dříve uvedeným a obr. 6.5 vyjádřeno ve zvoleném bodě B silovým výslednicovým bivektorem $\{\vec{F}_v, \vec{M}_v\}_B$, který můžeme vyjádřit v souřadnicovém tvaru maticově takto:

$$\varphi_B = \left[F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z \right]_B^T \text{ - silový výslednicový bivektor} \quad (6.5)$$

Souřadnice bivektoru φ_B jsou buď neúplně určeny nebo jsou nulové v důsledku vlastností vazby NNTN. Z podmínky neutrality styku $F_x v_x = 0$ vyplývá: Je-li pohyb v daném směru (x) geometricky možný ($v_x \neq 0$), pak příslušná souřadnice odpovídající silové nebo momentové výslednici je nulová ($F_x = 0$). Z předchozího výkladu je zřejmé, že pro vazbu NNTN k matici pohyblivosti \mathbf{k}_v můžeme přiřadit matici silového působení \mathbf{k}_φ takto:

Je-li

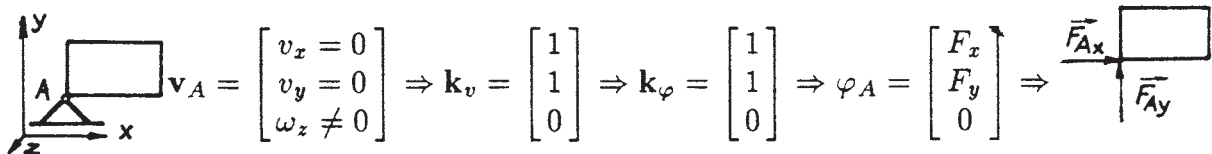
$$k_i = 0 \implies k_{\varphi_i} = 0 \quad ; \quad k_i = 1 \implies k_{\varphi_i} = 1$$

k matici \mathbf{k}_φ přiřadíme výslednicový silový bivektor podle vztahu

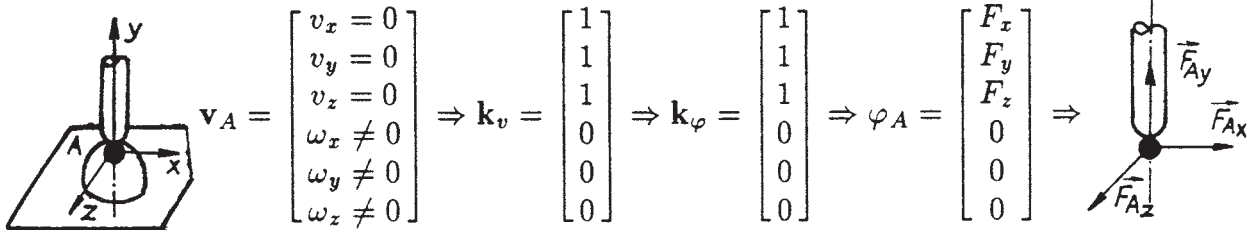
$$k_{\varphi_i} = 0 \implies \varphi_i = 0 \quad ; \quad k_{\varphi_i} = 1 \implies \varphi_i \neq 0$$

nebo φ_i je závislý na $\varphi_j \neq 0$.

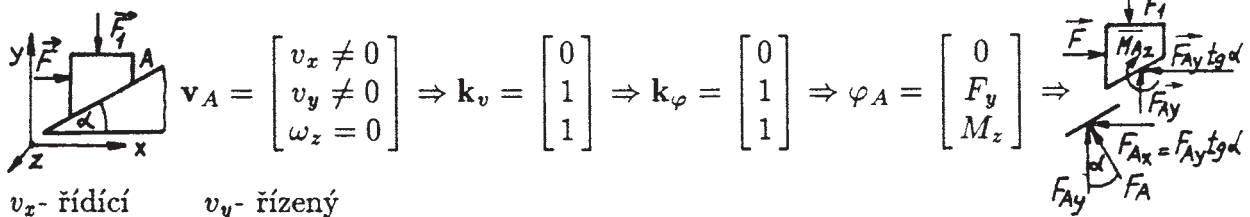
Jako příklad si uvedeme rotační vazbu. Složky pohybu tělesa jako celku budou v důsledku



Prostorovou sférickou vazbou

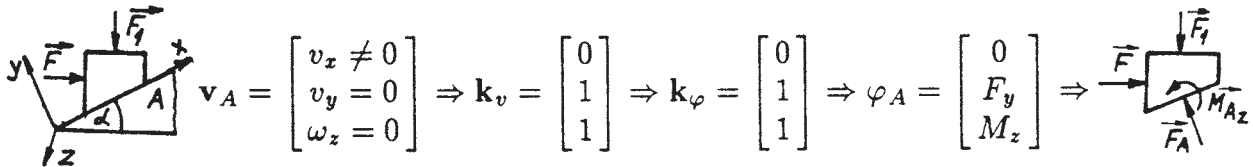


Posuvná rovinná vazba



v_x - řídicí v_y - řízený

Vhodněji zvolený souřadnicový systém



Obr. 6.7:

stykové vazby závislé v těchto případech:

- a) Jestliže zvolíme nevhodně souřadnicový systém.
- b) Jestliže stykový útvar Γ_s se skládá z více oblastí, např. šroubová vazba.

Tento případ můžeme chápat jako zvláštní uložení tělesa s více vazbami. Matice \mathbf{k}_φ udává obecně nenulové souřadnice výslednicového stykového bivektoru, které jsou po uvolnění vazby neúplně určeny. Proto počet jedniček v \mathbf{k}_φ určuje počet neznámých nezávislých parametrů, který označíme μ . Zřejmě platí

$$\mu = \mathbf{k}_\varphi^T \mathbf{k}_\varphi \quad (6.6)$$

Jak jsme již uvedli, pohyb tělesa jako celku vzhledem k základnímu tělesu můžeme vyjádřit translačním pohybem jednoho bodu B tělesa a rotačním pohybem kolem bodu B. Pro libovolný bod C tělesa pak platí $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{CB}$. Pohyb tělesa jako celku v prostoru má tedy 6 nezávislých složek. Tři složky translačního pohybu libovolného bodu a tři složky rotačního pohybu kolem tří nezávislých os procházejících daným bodem. Počet nezávislých složek pohybu tělesa jako celku nazýváme *počtem stupňů volnosti volného tělesa* a značíme i_v . Pro volné těleso v prostoru $i_v = 6$, v rovině $i_v = 3$. V důsledku neprostupnosti těles stykové vazby pohyb tělesa omezují, odebírají tělesu stupně volnosti. Počet stupňů volnosti odebraných vazbou značíme ξ . Vzhledem k zavedení matice \mathbf{k}_v ($k_i = 0$ - složka pohybu geometricky možná, $k_i = 1$ - složka pohybu geometricky nemožná) platí:

$$\xi = \mathbf{k}_v^T \mathbf{k}_v \quad (6.7)$$

Podmínku neutrálnosti vazby můžeme zapsat

vektorově $\vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\omega} = 0$

algebraicky $F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z + M_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z = 0$

maticově $\varphi^T \vec{v} = \vec{v}^T \varphi = 0$,

přičemž pro každý činitel $F_i v_i = 0$ resp. $M_i \omega_i = 0$

Odvozené závislosti pro vazby NNTN můžeme shrnout do těchto vět:

Pro styk těles NNTN vazbou platí vztah

$$\mathbf{k}_v = \mathbf{k}_\varphi$$

Počet nezávislých neznámých souřadnic výslednicového stykového bivektoru určíme ze vztahu $\mu = \mathbf{k}_\varphi^T \mathbf{k}_\varphi$

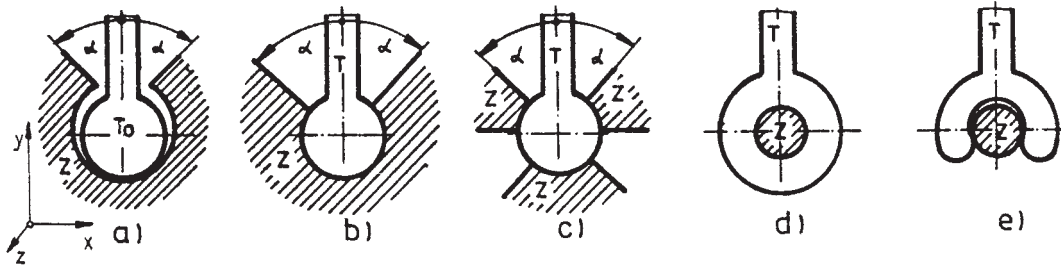
Počet stupňů volnosti odebraných tělesu vazbou určíme ze vztahu $\xi = \mathbf{k}_v^T \mathbf{k}_v$

Z uvedených vět vyplývá tvrzení: Pro vazbu NNTN je počet stupňů volnosti odebraných vazbou roven počtu neznámých nezávislých souřadnic výslednicového bivektoru.

$$\xi = \mu$$

6.3 Uvolňování vazeb NNTN.

V předchozím odstavci jsme se zabývali kinematickými a silovými charakteristikami vazeb NNTN. Uvažovali jsme vazby s jedním stykovým útvarem Γ_s a ukázali jsme, že z hlediska pohybu tělesa jako celku je kinematicky styk charakterizován maticí pohyblivosti \mathbf{k}_v . Pokud jsme ve výkladu popsali vazbu, tak pouze z hlediska probírané látky. Všimněme si nyní několika konkrétních vazeb, jak jsou nakresleny na obr. 6.8.



Obr. 6.8:

Z názoru by mělo být zřejmé, že ve všech případech styk umožňuje rotaci tělesa T kolem osy z . Z kinematického hlediska, na rozlišovací úrovni statiky, jsou všechny vazby stejné, protože matice \mathbf{k}_v je pro všechny případy stejná. Přesto u každé vazby můžeme nalézt odlišnosti, které na vyšší rozlišovací úrovni nebo z hlediska funkce zařízení mohou být podstatné. Případy podle obr. **a**, **b**, **c** umožňují sice rotaci, ale možné natočení je ohraničeno. Liší se stykové plochy, což bude mít za následek rozdílné rozložení stykového tlaku. Vzhledem k různé velikosti stykové plochy budou rozdílné i maximální stykové tlaky. Liší se i počet stykových ploch. Vazba podle obr. **d** natočení neomezuje, těleso T se může otáčet dokola. Vazba **e** neomezuje natočení tělesa T, ale funkce styku je závislá na silové soustavě π působící na těleso T. U vazby podle obr. **f** je možné natočení tělesa T nejen ohraničeno, ale také funkce styku je závislá na silové soustavě π působící na těleso T. Pro některé silové soustavy vazba bude ve funkci, pro jiné nastane oddělení těles. Vidíme, že matice \mathbf{k}_v vystihuje jen jistou možnost pohybu a že ke každé vazbě existují další omezení, ať již geometrická nebo silová.

Konkrétní provedení vazby podstatně ovlivňuje její funkční vlastnosti, které souvisí s celou řadou okolností funkčního charakteru a nesouvisí jen s mechanikou. Jsou to funkční požadavky na pohyb, montáž, mazání, opotřebování stykových ploch apod. Vlastní navrhování vazby je problém konstrukčního charakteru. Proto komplexní rozbor vazby patří do konstrukčních předmětů - částí strojů a předmětů specializací.

Na počátku studia mechaniky, v předmětu statika, se můžeme zabývat jen základními mechanickými vlastnostmi vazby souvisejícími s funkcí vazby a to:

- Určením možných složek pohybu vázaného tělesa.
- Ohraničením možných složek pohybu v mezních polohách např. vazby **a**, **b**, **c** - úhel α .
- Omezením pohybu z hlediska funkčnosti vazeb vyjádřené stykovými výslednicemi.

Určování pohybu ve smyslu bodů a) a b) patří do kinematiky, kde bude také probráno. Vzhledem ke vzájemné souvislosti mezi pohybem a silovým působením je nutné již ve staticce pohyb

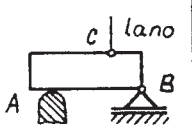
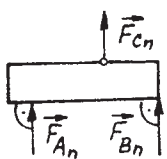
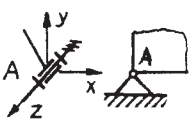
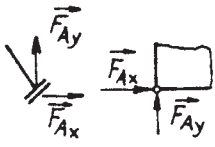

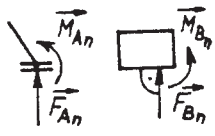
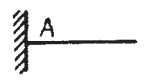
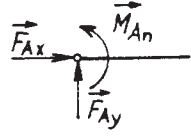
vyšetřovat a to prozatím na úrovni vymezené v předchozím odstavci, kde složky pohybu tělesa jako celku, omezené vazbou, kvalitativně popisuje matice \mathbf{k}_v . Na uvedené rozlišovací úrovni se z kinematického hlediska nezabýváme konkrétním tvarem, rozměry stykových ploch, mezními polohami a tím, zda může nastat zrušení styku rozpojením těles. Předpokládáme, že styk nastal a trvá.

Kinematickou stránku reálné vazby pak vystihuje pojem *kinematické dvojice*, který vymežíme takto:

Kinematická dvojice je abstraktní pojem, přiřazený reálné stykové vazbě z hlediska omezení složek pohybu tělesa jako celku vazbou.
Je popsán maticí pohyblivosti \mathbf{k}_v .

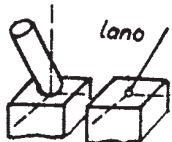
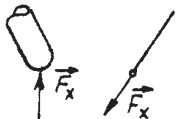
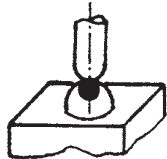
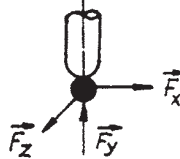

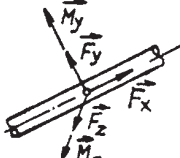

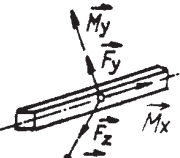

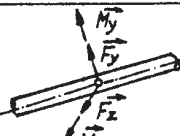



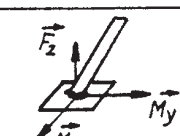
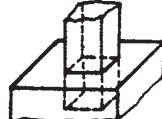


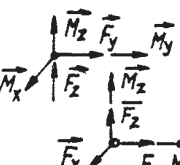
V tomto smyslu různým konkrétním vazbám je přiřazena stejná kinematická dvojice. Např. všem vazbám podle obr. 6.8 je přiřazena rovinná rotační kinematická dvojice. Názvy a označení kinematických dvojic podle počtu a charakteru omezených složek pohybu tělesa jako celku vazbou jsou uvedeny na obr. 6.9 a 6.10. V souladu s odst. 6.2 jsou tabulky doplněny silovými a kinematickými charakteristikami a uvolněním jednotlivých vazeb.

Základní kinematické dvojice v rovině

Název	Značka	Schéma	\mathbf{v}_A $v_x \ v_y \ \omega_z$	φ_A $F_x \ F_y \ M_z$	Uvolnění	ξ
Obecná	o		$\neq 0 \ 0 \ \neq 0$	$0 \ F_y \ 0$		1
Rotační	r		$0 \ 0 \ \neq 0$	$F_x \ F_y \ 0$		2
Posuvná	p		$\neq 0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ M_z$		2
Vetknutí	n		$0 \ 0 \ 0$	$F_x \ F_y \ M_z$		3

Obr. 6.9:

Základní kinematické dvojice v prostoru

Název	Značka	Schéma	\mathbf{v}_A $v_x \ v_y \ v_z$ $\omega_x \ \omega_y \ \omega_z$	φ_A $F_x \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$	Uvolnění	ξ
Obecná	o		$0 \neq 0 \neq 0$ $\neq 0 \neq 0 \neq 0$	$F_x \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$		1
Sférická	s		$0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \neq 0 \neq 0$	$F_x \ F_y \ F_z$ $0 \ 0 \ 0$		3
Rotační	r		$0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \ 0 \ 0$	$F_x \ F_y \ F_z$ $0 \ M_y \ M_z$		5
Posuvná	p		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$		5
Rotačně posuvná	rp		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $0 \ M_y \ M_z$		4
Sféricko posuvná	sp		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \neq 0 \neq 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $0 \ 0 \ 0$		2
Plochá	pl		$\neq 0 \ \neq 0 \ 0$ $0 \ 0 \ \neq 0$	$0 \ 0 \ F_z$ $M_x \ M_y \ 0$		3
Vetknutí	n		$0 \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$	$F_x \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$		6
Šroubová	š		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$ nebo $0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$ nebo $F_x \ F_y \ F_z$ $0 \ M_y \ M_z$		5

Obr. 6.10:

K reálné vazbě ze statického hlediska přiřadíme model vazby, jehož kinematické vlastnosti nazveme a označíme podle tabulky. Např. rovinná rotační kinematická dvojice. Stejným jménem nazveme také model vazby, ale slovo model v názvu neuvádíme. Tedy rovinná rotační vazba. Vyjimku tvoří podpora a lano, které jsou obecné kinematické dvojice.

Z dosavadních úvah vyplývá, že vazba stykem na nejjednodušší úrovni je určena:

- a) **Přiřazenou kinematickou dvojicí**, která vyjadřuje omezené složky pohybu tělesa jako celku vzhledem ke geometrii stykové vazby. Pokud předmětem řešení je posloupnost rovnovážných stavů v různých polohách tělesa, případně určení rovnovážné polohy, pak z kinematického hlediska musíme ke kinematické dvojici přiřadit obor existence vazby z geometrického hlediska. U případů podle obr. 6.8 je to omezení úhlu natočení jistým intervalem geometrické existence $I_g = (\alpha_l, \alpha_p)$ s tímto významem. Pokud $\varphi \in I_g$ má vazba charakter rotační rovinné kinematické dvojice, v případě, že $\varphi = \pm\alpha$ mění se rotační kinematická dvojice na nepohyblivou. Hodnoty úhlu $\varphi = \pm\alpha$ do intervalu I_g nepatří. Uvedené vlastnosti vyjádříme větou:

U statických úloh, které jsou charakteristické změnou polohy tělesa vzhledem ke vztažnému tělesu, je nutné vazby stykem z kinematického hlediska určit maticí pohyblivosti a intervalem geometrické existence.

- b) **Stykovými silami** reprezentovanými silovou a momentovou výslednicí (stykovým výslednicovým bivektorem) \vec{F}_s, \vec{M}_{sB} , resp. stykovými funkcemi. Z obrázku 6.8 je zřejmé, že provedení vazby může významně ovlivňovat existenci vazby (přiřazenou kinematickou dvojici). Jestliže vazba omezuje pohyb v určitém směru, ale pouze v jednom smyslu, pak funkčnost vazby závisí na soustavě sil π působící na těleso T. Vymezení funkčnosti vazby můžeme vyjádřit podmínkami pro hodnoty parametrů výslednicových stykových bivektorů, tuto podmínku nazveme stykovou podmínkou.

Vazba NNTN je pak ze statického hlediska určena:

1. Maticí pohyblivosti \mathbf{k}_v .
2. Výslednicovým stykovým bivektorem $\{\vec{F}_s, \vec{M}_s\}_B$, resp. stykovými funkcemi.
3. Stykovou podmínkou.

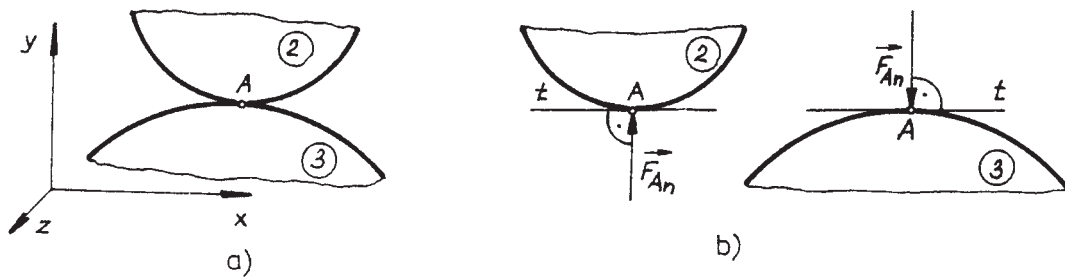
V předchozích odstavcích jsme ukázali, že pro nejjednodušší možný styk NNTN platí $\mathbf{k}_v = \mathbf{k}_\varphi$, který dává jednoznačný vztah mezi kinematickou dvojicí a obecně nenulovými souřadnicemi výslednicového stykového bivektoru. K určení styku je však nutné ještě formulovat stykovou podmínku, která vychází z tlakovosti a neutrálnosti styku, tedy ze vztahů $dF_{An} \leq 0$, $d\vec{F}_A \cdot \vec{v}_A = 0$ pro $A \in \Gamma_s$, při kladné orientaci normály ven z tělesa T. Z uvedených vztahů je třeba určit stykovou podmínku pro výslednicový stykový bivektor.

Styková podmínka závisí na konkrétním provedení vazby. Odvození provedeme pro podporu a rovinnou jednostrannou posuvnou vazbu.

1. Podpora.

Uvolnění vazby viz obr. 6.11b. Tělesa se stýkají v bodě A, který je působištěm síly $\vec{F}_{An} \equiv \vec{F}_{Ay}$. Výslednicový stykový bivektor můžeme vyjádřit k libovolnému bodu, zvolíme bod A, $\Phi = \{\vec{F}_{An}, \vec{0}\}_A$. Z podmínky tlakovosti vyplývá $\vec{F}_A \leq \vec{0}$. Styková podmínka podpory se stykem v bodě A je $\{\vec{F}_V, \vec{M}_V\}_A = \{\vec{F}_A \leq \vec{0}, \vec{0}\}$.

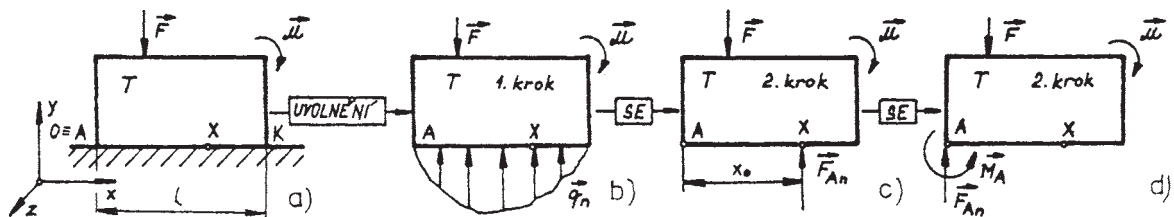
Momentová výslednice k bodu A je nulová a silová výslednice leží na normále n_A a je záporná. \vec{F}_A je orientována do tělesa.



Obr. 6.11:

$$v_A = \begin{bmatrix} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{uvolnění obr. 6.11b}$$

2. Rovinná jednostranná posuvná vazba. Viz obr. 6.12 .



Obr. 6.12:

$$v_A = \begin{bmatrix} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} \Rightarrow \text{uvolnění obr. 6.12d}$$

Tělesa se stýkají v úsečce \overline{OK} . Z neutrality vazby vyplývá, že stykové síly tvoří soustavu rovnoběžných sil. Z podmínky tlakovosti vychází souhlasná orientace, tedy elementární stykové síly tvoří soustavu rovnoběžných souhlasně orientovaných sil v rovině. Silová

výslednice této soustavy $\vec{F}_A \neq \vec{0}$, podle odts. 5.2 existuje osa silové soustavy π_s . Její polohu jsme označili v obr. 6.12 souřadnicí x_o , kterou určíme z podmínky statické ekvivalence silových soustav π_s a π_V .

$$F_V : \int_0^l q_n dx = F_A \quad M_V : \int_0^l q_n x dx = M_A = F_A x_o \Rightarrow x_o = \frac{M_A}{F_A} = \frac{\int_0^l q_n x dx}{\int_0^l q_n dx}$$

Protože $q_n(x) < 0$ pro všechna $x \in \langle 0, l \rangle$ platí $0 \leq \frac{x}{l} \leq 1$ odtud $0 \geq \frac{x}{l} q_n \geq q_n$
a $0 \leq -\frac{x}{l} q_n \leq -q_n$ tedy $0 \leq -\int \frac{x}{l} q_n dx \leq -\int q_n dx$ odtud

$$x_o = \frac{\int q_n x dx}{\int q_n dx} = \frac{-l \int \frac{x}{l} q_n dx}{-\int q_n dx} \Rightarrow 0 \leq \frac{x_o}{l} = \frac{\int \frac{x}{l} q_n dx}{\int q_n dx} \leq 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq x_o \leq l \text{ tedy } x_o \in \langle 0, l \rangle$$

Má-li být rovinná jednostranná posuvná vazba funkční, a tím i posuvnou kinematickou dvojicí, musí platit:

$F_A < 0$ a osa silové soustavy rozloženého silového působení ve styku protíná úsečku \overline{OK} a je k ní kolmá.

V souladu s dříve uvedeným můžeme tuto větu vyjádřit takto:

Soustavu rozloženého silového působení ve styku můžeme z hlediska statické ekvivalence nahradit jedinou silou, která je
- orientována do tělesa
- její nositelka je kolmá k úsečce \overline{OK} a protíná ji.

Vazba podle obr. 6.12 je posuvnou kinematickou dvojicí jen podmíněně, při splnění podmínek $F_A < 0$ a $x_o \in \langle 0, l \rangle$. Chceme-li, aby vazba byla posuvnou kinematickou dvojicí nezávisle na silovém působení, je nutné vytvořit styk ve dvou rovnoběžných úsečkách, viz tabulka 6.1. Úpravou vazby se pohyblivost nezmění, změní se styková podmínka. Upravená vazba není podmíněně funkční, je posuvnou kinematickou dvojicí nezávislou na soustavě π .

Posuvná vazba v rovině

Název	Schéma	Je posuvnou kinematickou dvojicí charakteru [0 1 1]
Jednostranná		podmíněně
Oboustranná		vždy

Obr. 6.13:

Uvolnění rovinné oboustranné posuvné vazby dělá studentům problémy. Detailní rozbor této vazby ze statického hlediska je v [2] str. 43. Obdobně lze stykové podmínky odvodit pro další vazby. Odvození a formulace stykových podmínek pro prostorové vazby je poněkud náročnější. V základním studiu je nebudeme uvádět.

6.4 Uložení vázaného tělesa.

Až dosud jsme se zabývali tělesem vázaným jedinou vazbou. Uvedli jsme základní kinematické a silové vlastnosti NNTN vazeb. Odvodili jsme vztah pro počet stupňů volnosti odebraných stykovou vazbou $\xi = \mathbf{k}_v^T \mathbf{k}_v$. Určili jsme, že počet stupňů volnosti volného tělesa v prostoru je $i_v = 6$ a v rovině $i_v = 3$. Počet stupňů volnosti tělesa vázaného jednou stykovou vazbou určíme ze vztahu

$$i = i_v - \xi, \quad 0 < \xi \leq 6 \quad (6.8)$$

Těleso vázané jednou stykovou vazbou k základnímu tělesu je zvláštním případem, se kterým se ve strojírenské praxi setkáváme zcela výjimečně. Převážně se jedná o tělesa vázaná více stykovými vazbami, obecně různého typu. V souladu s dříve uvedeným budeme soustavu všech mechanických vazeb nazývat uložením tělesa, které označíme U. Kinematicky je uložení určeno soustavou kinematických dvojic, silově soustavou výslednicových stykových bivektorů. Tedy:

Uložení tělesa T je soustavou všech stykových vazeb, kterými je těleso vázáno k okolí. Prvkem uložení je vazba. Uložení je určeno:

- kinematicky - soustavou kinematických dvojic
- silově - soustavou výslednicových stykových bivektorů

U více vazeb je nutné uvažovat další závažnou okolnost - možnost omezování deformace. Přístupujeme-li ke staticce jako teorii vycházející z axiomu o nedeformovatelnosti těles, omezením deformace se zabývat nemusíme. Uvažujeme-li statiku jako část teoretického základu strojírenství, pak s ohledem na řešení konkrétních problémů na reálném (deformovatelném) tělese je nutné uvážit, zda omezení deformace je, či není podstatné. Ve staticce alespoň kvalitativně ve smyslu - uložení omezuje, neomezuje deformaci. V případě, že omezuje, pak určíme kolik deformačních parametrů je stykovými vazbami omezeno. Kvantitativním vyjádřením deformace se budeme zabývat až v pružnosti pevnosti.

Proto si musíme uvědomit:

Při rozboru uložení tělesa musíme již ve staticce uvažovat deformaci ve smyslu možnosti jejího omezení a počtu omezených deformačních parametrů.

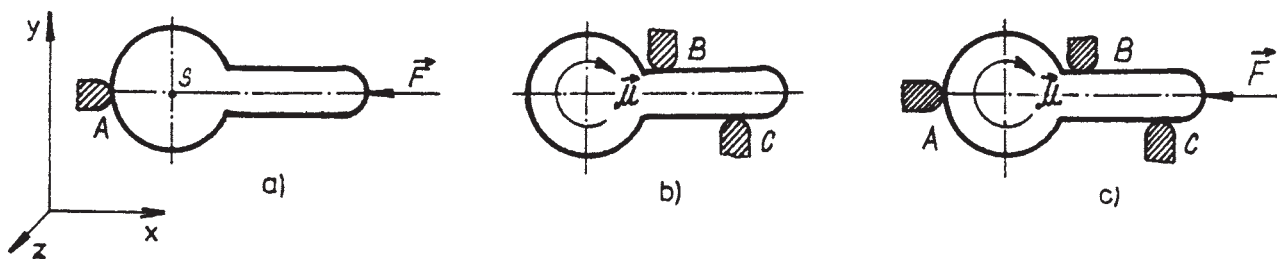
Musíme tedy respektovat následující skutečnost:

Uložení tělesa omezuje a ovlivňuje pohyb tělesa jako celku a deformaci.

Vyjádření pohyblivosti tělesa vázaného více než jednou stykovou vazbou je podstatně složitější problém než v případě jediné stykové vazby. Komplikace spočívá ve vzájemné závislosti složek mechanického pohybu omezených vazbami.

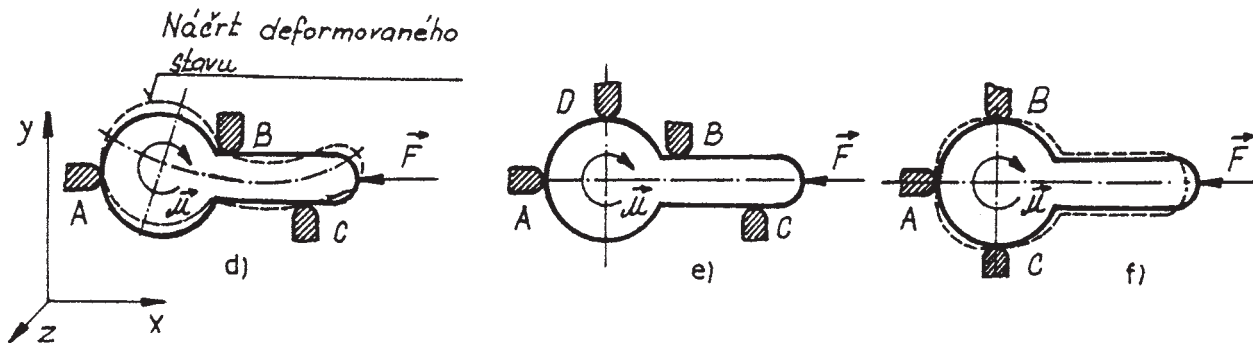
Jestliže je těleso podle obr. 6.13a vázáno jedinou podporou, pak dochází k omezení pohybu tělesa ve směru osy x. Matice pohyblivosti tělesa je totožná s maticí pohyblivosti vazby A $\mathbf{k}_{vT} \equiv \mathbf{k}_{vA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Pokud je těleso vázáno dvěma vazbami uspořádanými podle obr. 6.13b, pak dochází k omezení pohybu ve směru osy y a rotací kolem osy z. Matice pohyblivosti vázaného tělesa má tvar $\mathbf{k}_{vT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, ale matice pohyblivosti vazeb jsou $\mathbf{k}_{vB} = \mathbf{k}_{vC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Na obrázku 6.13c je uložení tělesa pomocí tří podpor, matice pohyblivosti vázaného tělesa má tvar $\mathbf{k}_{vT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Jestliže nyní přidáme ještě jednu podporu, pak pohyblivost (která



Obr. 6.14:

popisuje pohyb tělesa jako celku) se nemůže změnit, protože těleso je uloženo nepohyblivě. Nyní vyvstává otázka, zda vazba D (obr. 6.14e) je z hlediska mechanického pohybu funkční? Chceme-li na tuto otázku odpovědět, musíme si na základě zkušenosti a názoru představit deformované těleso v případě c, viz obr. 6.14d.



Obr. 6.15:

Z obrázků d) a c) je patrné, že vazba D je funkční a omezuje jeden deformační parametr - posuv bodu D ve směru osy y . Ve statice určování pohyblivosti tělesa a počtu omezených deformačních parametrů můžeme provádět na základě kinematického rozboru, který vychází z názoru a zkušenosti, ne z kinematického řešení.

Nyní zformulujeme vztah pro určení pohyblivosti vázaného tělesa na úrovni kinematického rozboru.

$$i = i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right) \quad (6.9)$$

kde i - počet stupňů volnosti vázaného tělesa.

i_v - počet stupňů volnosti volného tělesa.

$\sum \xi_i$ - počet složek mechanického pohybu odebraných vazbami.

η - počet deformačních parametrů omezených stykovými vazbami.

$\sum \xi_i - \eta$ - počet stupňů volnosti odebraných stykovými vazbami.

Uložení tělesa podle obr. 6.13 a 6.14d,e tvoří tzv. *normální stavy*, které jsou charakteristické tím, že při normálním ukládání tělesa stykovými vazbami se nejdříve omezuje pohyb tělesa jako celku, až do nepohyblivého uložení tělesa a teprve pak dochází k omezení deformace.

Vedle případů normálních existují případy výjimečné. Jeden výjimečný případ je zobrazen na obr. 6.14f. Vazby A,B omezují posuvy ve směru os x, y. Vazba C omezuje deformační parametr i když těleso je uloženo pohyblivě, může se otáčet kolem osy z. Výjimečné stavy jsou charakteristické tím, že dříve než byly omezeny složky pohybu tělesa jako celku dochází k omezení deformačních parametrů. Nyní pro jednotlivé případy podle obr. 68 určíme charakter uložení.

Poznámka k značení: r.k.d - r.....označení kinematické dvojice

- k.d....zkratka kinematické dvojice

Předpokládáme normální uložení.

$$\begin{array}{ccc} a) & b) & c) \\ A - o.k.d - \xi_A = 1 & B, C - o.k.d - \xi_i = 1 & A, B, C - o.k.d - \xi_i = 1 \\ \eta = 0 & \eta = 0 & \eta = 0 \end{array}$$

$$i = i_v - (\sum \xi_i - \eta)$$

$$\begin{array}{l} i = 3 - 1 = 2 \\ i = 2, \eta = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} i = 3 - 2 = 1 \\ i = 1, \eta = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} i = 3 - 3 = 0 \\ i = 0, \eta = 0 \end{array}$$

Těleso je uloženo pohyblivě se dvěma stupni volnosti, bez omezení deformačních parametrů

Těleso je uloženo pohyblivě s jedním stupněm volnosti, bez omezení deformačních parametrů

Těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů

$$\begin{array}{ccc} e) & & f) \\ A, B, C, D - o.k.d - \xi_i = 1 & & A, B, C - o.k.d - \xi_i = 1 \\ \text{Vazby omezují více složek pohybu než je stupňů volnosti tělesa v rovině} \rightarrow \eta \neq 0 & & \text{Těleso se může pootočit kolem osy z procházející bodem S} \rightarrow i_{min} = 1 \\ i = 3 - (4 - 1) = 0 & & \sum \xi_i = 3 \rightarrow \eta = 1 \\ i = 0, \eta = 1 & & i = 3 - (3 - 1) = 1 \\ i = 1, \eta = 1 & & i = 1, \eta = 1 \\ \text{Těleso je uloženo nepohyblivě s jedním omezeným deformačním parametrem} & & \text{Těleso je uloženo pohyblivě s jedním omezeným deformačním parametrem} \end{array}$$

Zobecněním jednotlivých případů obdržíme základní stavy, které vázané těleso z hlediska pohybu jako celku a deformace může nabývat.

Normální stavy uložení.

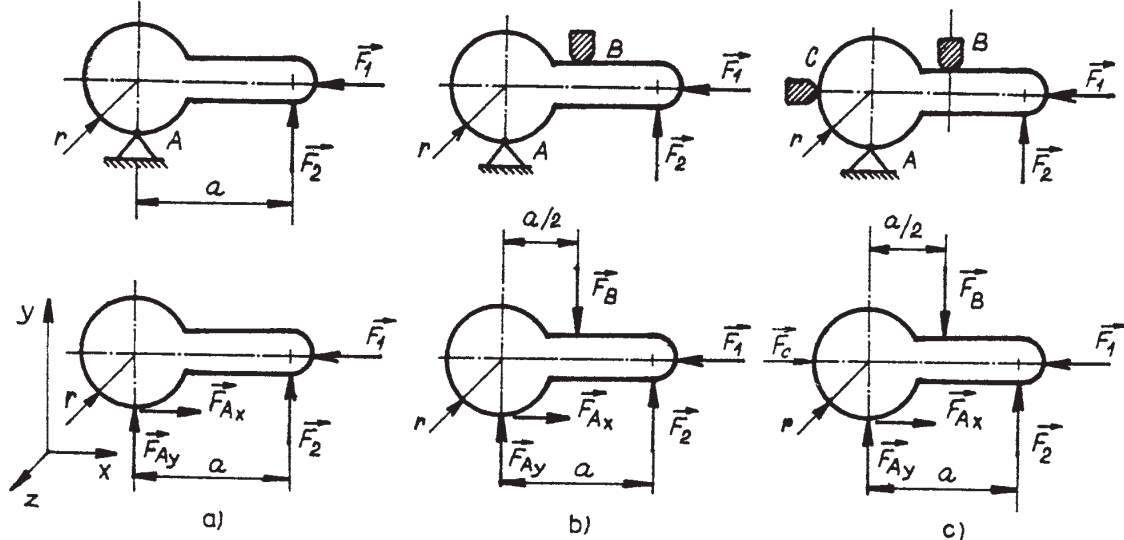
$i > 0, \eta = 0$ - těleso je uloženo pohyblivě bez omezení deformačních parametrů
 $i = 0, \eta = 0$ - těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů
 $i = 0, \eta > 0$ - těleso je uloženo nepohyblivě s η omezenými deformačními parametry

Výjimečné stavy uložení.

$i > 0, \eta > 0$ - těleso je uloženo pohyblivě s η omezenými deformačními parametry

Z předchozího textu vyplývá, že kinematický rozbor závisí na podkladech na jejichž základě si vytváříme představu o omezených složkách pohybu tělesa a zkušenostech člověka, který

rozbor provádí. Vzhledem k malým zkušenostem studentů si položíme otázku: "Jestliže se dopustím chyby v určení pohyblivosti v důsledku malých zkušeností, jsem schopen na základě statického řešení chybu poznat?" Abychom na tuto otázku mohli odpovědět a získali základní představu, provedeme kinematický rozbor a sestavíme statické podmínky pro některé typy uložení tělesa. Předpokládejme, že těleso podle obrázku je ve statické rovnováze. Pak jsme oprávněni sestavit podmínky statické rovnováhy.



Obr. 6.16:

a) $A - r.k.d - \xi_i = 2$

b) $A - r.k.d - \xi_i = 2$
 $B - o.k.d - \xi_i = 1$

c) $A - r.k.d - \xi_i = 2$
 $B, C - o.k.d - \xi_i = 1$

Kinematické dvojice odníma -
 jí více parametrů než je slo -
 žek pohybu tělesa jako celku

$$\sum \xi_i = 4, i_v = 3 \rightarrow \eta = 1$$

$\eta = 0$
 $i = 3 - 2 = 1$
 $i = 1, \eta = 0$

Uložení tělesa je pohyb -
 livé bez omezení
 deformačních parametrů

$\eta = 0$
 $i = 3 - 3 = 0$
 $i = 0, \eta = 0$

Uložení tělesa je ne -
 pohyblivé bez omezení
 deformačních parametrů

$\eta = 1$
 $i = 3 - (4 - 1) = 0$
 $i = 0, \eta = 1$

Uložení tělesa je nepohyb -
 livé s jedním omezeným
 deformačním parametrem

Podmínky statické rovnováhy:

$F_x : -F_1 + F_{Ax} = 0$
 $F_y : F_{Ay} + F_2 = 0$
 $M_{zA} : F_1 r + F_2 a = 0$
 $\mu_F = 2, \nu = 3$

$-F_1 + F_{Ax} = 0$
 $F_{Ay} - F_B + F_2 = 0$
 $F_1 r + F_2 a - F_B \frac{a}{2} = 0$
 $\mu_F = 3, \nu = 3$

$F_{Ax} + F_C - F_1 = 0$
 $F_{Ay} - F_B + F_2 = 0$
 $F_1 r + F_2 a - F_B \frac{a}{2} - F_C r = 0$
 $\mu_F = 4, \nu = 3$

Neznámé nezávislé parametry budeme rozlišovat podle charakteru neznámých souřadnic.

μ_F - silové

μ_M - momentové

μ_r - polohové, viz obr. 6.12 – x_o

$$\mu < \nu$$

ad a) uložení je staticky přeuročené. Pak mohou nastat tyto dva případy.

- $(\nu - \mu)$ – podmínek statické rovnováhy je identicky splněno.
 $\mu < \nu$ Těleso, které je uloženo pohyblivě je ve statické rovnováze.
 $(\nu - \mu)$ – podmínek statické rovnováhy je sporných. Těleso, které je uloženo pohyblivě není ve statické rovnováze, proto podmínky statické rovnováhy nejsme oprávněni sestavit. K určení silového působení je nutné sestavit pohybové rovnice, což je úloha dynamická. (Ve staticce neumíme.)

U případů podle obr. 6.15a, je-li $F_1 \neq 0 \wedge F_2 \neq 0$ pak $F_1 r + F_2 a \neq 0 \implies$ Těleso podle obrázku je uloženo pohyblivě a není ve statické rovnováze, není splněn počáteční předpoklad. Silové působení můžeme určit z pohybových rovnic, které ve staticce neumíme sestavit.

$$\mu = \nu \wedge \mu_M + \mu_r < \nu_M$$

ad b) - je splněna nutná podmínka statické určitosti úlohy.

(μ_M, μ_r určíme z momentových podmínek rovnováhy, proto $\mu_M + \mu_r < \nu_M$)
 Soustava statických rovnic je lineární. Určíme hodnotu determinantu soustavy.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} \end{vmatrix} = -\frac{a}{2} \neq 0$$

Soustava statických rovnic má právě jedno řešení. Uložení je staticky určité - neznámé nezávislé parametry určíme ze statických podmínek.

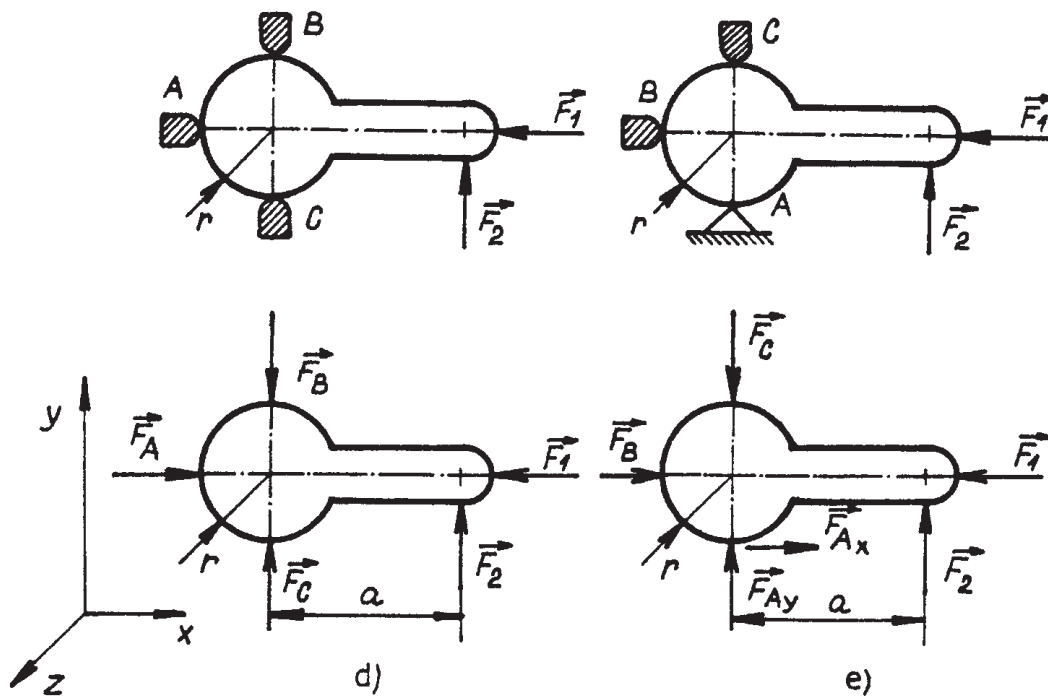
$$\mu > \nu$$

ad c) - uložení je staticky neurčité.

Neznámých nezávislých parametrů $NP = \{F_{Ax}, F_{Ay}, F_B, F_C\}$ je více než podmínek statické rovnováhy.

Stupeň statické neurčitosti určíme ze vztahu:

$$s = \mu - \nu$$



Obr. 6.17:

Další dva případy jsou **výjimečné** Viz obr. 6.16.

Kinematický rozbor

d)

$A, B, C - o.k.d \xi_i = 1$

Na základě malých zkušeností se
dopustíme chyby a předpokládáme

$$\eta = 0$$

$$i = 3 - 3 = 0$$

$$i = 0, \eta = 0$$

Těleso je uloženo nepohyblivě
bez omezení deformačních
parametrů

e)

$A - r.k.d - \xi_i = 2$

$B, C - o.k.d \xi_i = 1$

Kinematické dvojice odnímají
více parametrů než je složek
pohybu tělesa jako celku $\eta = 1$

$$i = 3 - (4 - 1) = 0$$

$$i = 0, \eta = 1$$

Těleso je uloženo nepohyblivě
s jedním omezeným defor-
mačním parametrem

Podmínky rovnováhy:

$$F_x : -F_1 + F_A = 0$$

$$F_y : F_C - F_B = 0$$

$$M_{zS} : F_2 a = 0$$

$$\mu_F = 3, \nu = 3$$

$$F_x : -F_1 + F_B + F_{Ax} = 0$$

$$F_y : F_{Ay} - F_C + F_2 = 0$$

$$M_{zA} : F_1 r + F_2 a - F_B r = 0$$

$$\mu_F = 4, \nu = 3$$

- ad d) Momentová podmínka rovnováhy je sporná $\Rightarrow \nu = 2$, těleso se může otáčet kolem osy \mathbf{z} procházející bodem S, tedy $i = 1, \eta = 1$. Těleso je uloženo pohyblivě s jedním omezeným deformačním parametrem. **Uložení tělesa je výjimečné.**
- ad e) **Uložení tělesa je staticky neurčitě.** Vzhledem k tomu, že \vec{F}_C a \vec{F}_{Ay} leží na jedné nositelce můžeme označit $\vec{F}_{Ay,C} = \vec{F}_{Ay} - \vec{F}_C$. Z podmínek statické rovnováhy neurčíme všechny neznámé nezávislé parametry $\{F_{Ax}, F_{Ay}, F_B, F_C\}$. Můžeme však určit množinu *modifikovaných parametrů* $\{F_{Ax}, (F_{Ay} - F_C), F_B\}$. Protože množinu modifikovaných parametrů můžeme sestavit pouze v případě, že dvě síly nebo složky sil leží na jedné nositelce, nazveme danou úlohu *staticky neurčitou výjimečnou*. *Z uvedených případů je zřejmé, že určení pohyblivosti a statické řešení spolu souvisí a chybný předpoklad v kinematickém rozboru na základě statického řešení můžeme opravit.*

Ze statického hlediska rozlišujeme uložení:

Staticky určité - všechny neznámé nezávislé parametry stykových výslednic určíme ze statických podmínek.

Staticky neurčitě - k určení neznámých nezávislých parametrů statické podmínky nestačí.

Staticky neurčitě výjimečné - ze statických podmínek nelze určit všechny neznámé nezávislé parametry, lze však určit parametry modifikované.

Určení charakteru uložení tělesa je důležitou úlohou mechaniky těles. Určení pohyblivosti a omezení deformace vyžaduje zvládnutí kinematiky a pružnosti. Ve staticce, která tyto předměty předchází, se můžeme omezit jen na ty případy, kdy lze pohyblivost i omezení deformačních parametrů posoudit spolehlivě z názoru. Určení statického charakteru uložení však vychází z rozboru vlastností statických rovnic a tuto úlohu můžeme řešit ve staticce.

Souhrnně můžeme konstatovat:

Těleso z hlediska uložení a soustavy π úplně určených silových prvků je charakterizováno:

- pohyblivostí $i \geq 0$
- mírou omezení deformace $\eta \geq 0$
- je-li $i > 0$ pak charakterem pohybu z hlediska statické rovnováhy
 - SR = 0 - statická rovnováha nastává
 - SR = 1 - statická rovnováha nenastává
- je-li $\eta > 0, i = 0$ - mírou statické neurčitosti $s = \mu - \nu$
- v případě staticky neurčitého uložení výjimečného - mírou statické řešitelnosti $s_v = \mu_v - \nu$, kde μ_v je počet modifikovaných neznámých nezávislých parametrů.

Ve staticce u tělesa vázaného NNTN vazbami budeme rozlišovat **uložení**.

pohyblivé	nepohyblivé
omezující deformaci	neomezující deformaci
zajišťující statickou rovnováhu	nezajišťující statickou rovnováhu
staticky určité	staticky neurčitě
normální	výjimečné

Zvládnutí analýzy uložení patří k důležité části úlohy nejen ve staticce, ale i v ostatních předmětech mechaniky těles. Dnes podstata není v řešení statických podmínek, to zvládne hravě běžný počítač. Důležitá je analýza chování, v tomto případě analýza vlastností uložení. Na závěr shrneme vlastnosti uložení NNTN vazbami, vyplývající z předchozího rozboru.

Normální případy.

pohyblivost a identické splnění statických podmínek ve směru neomezených složek pohybu tělesa jako celku

Statická určitost

nepohyblivost bez omezení deformace

Statická neurčitost

→ nepohyblivost a omezení deformace

Výjimkové případy.

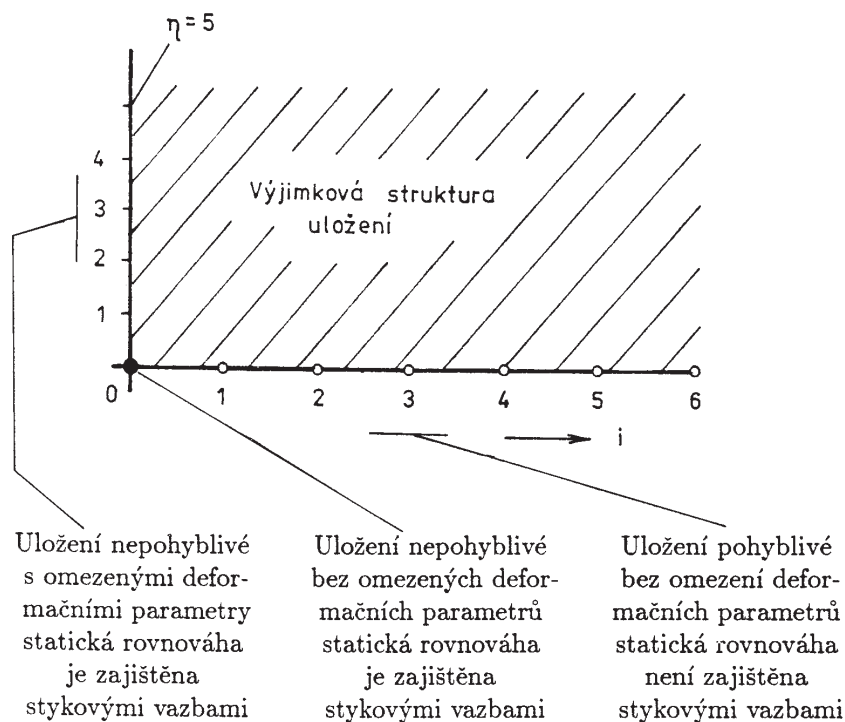
Uložení výjimkové

→ pohyblivost a omezení deformace

Uložení staticky neurčité
výjimkové

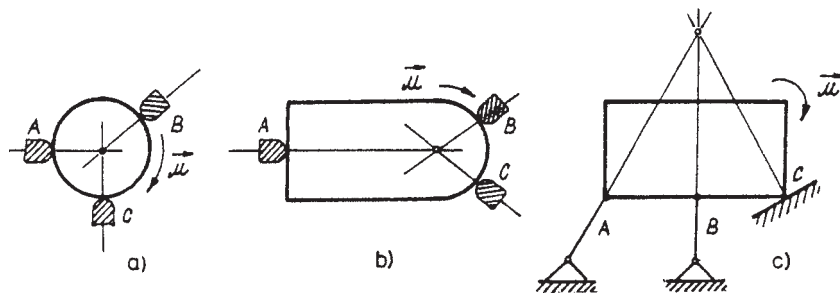
→ nepohyblivost a omezení deformace,
možnost určení modifikovaných parametrů

Vlastnosti uložení vazbami NNTN můžeme graficky znázornit takto:



Obr. 6.18:

Několik příkladů vyjímkového uložení tělesa.



Obr. 6.19:

Detailní rozbor uložení tělesa je proveden u každé úlohy A[68] - A[84] v [2]. Z pedagogického hlediska není vhodné tyto úlohy pouze procházet, ale je nutné je samostatně řešit a řešení pouze zkontrolovat a promyslet. Vzhledem k tomu, že jsme již probrali všechny základní operace a činnosti týkající se silového přístupu řešení úloh statiky, můžeme přistoupit k jejich kategorizaci.

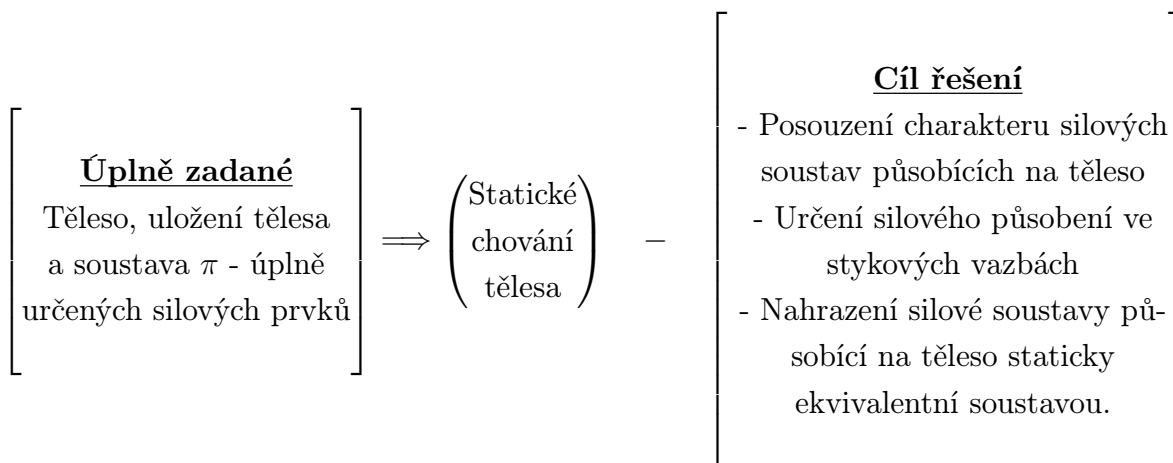
6.5 Typy statických úloh

Základní členění úloh a to nejen ve statice je následující

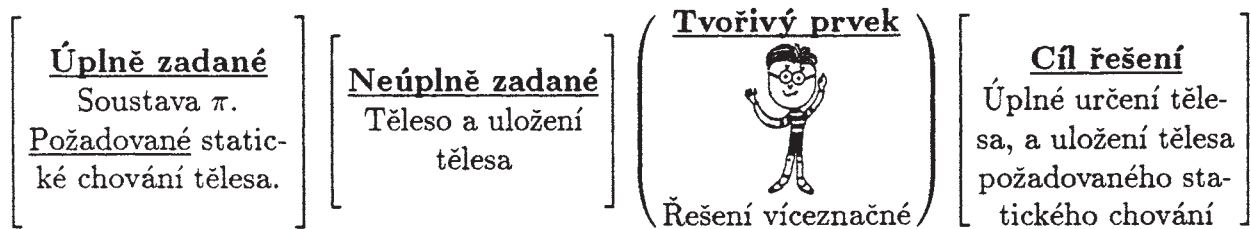
- úlohy na statickou analýzu
- úlohy na statickou syntézu

Úlohy na statickou analýzu a syntézu se liší tím, co je zadáno a co se má řešením určit. Obě skupiny můžeme stručně charakterizovat takto:

Úlohy na analýzu



Úlohy na syntézu



Obr. 6.20:

A) Úlohy na analýzu

Úlohy na statickou analýzu dělíme na

- úlohy o statické kontrole
- úlohy o statickém řešení
- úlohy týkající se nahrazení úplně zadané silové soustavy jinou silovou soustavou, jejíž neúplně zadané prvky můžeme určit ze statického řešení.

Úlohy o statické kontrole:

Kontrola statické ekvivalence silových soustav π_1, π_2 působících na těleso.

Na uvolněné nebo vázané těleso působí soustava úplně zadaných silových prvků π_1 nebo π_2 , které jsou staticky ekvivalentní. Provedte kontrolu statické ekvivalence silových soustav π_1 a π_2 .

Je-li $\vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 \wedge \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2$ – pak π_1 a π_2 jsou staticky ekvivalentní.

Kontrola charakteru silové soustavy.

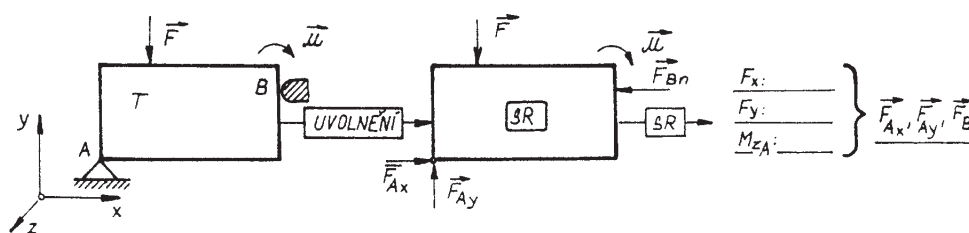
Na těleso T působí úplně zadaná soustava π , která je rovnovážnou silovou soustavou. Zkontrolujte rovnovážnost silové soustavy.

Je-li $\vec{F}_V = \vec{0} \wedge \vec{M}_V = \vec{0}$ – pak π je rovnovážnou soustavou.

Úlohy o statickém řešení:

Určení výsledných stykových sil. Na vázané těleso podle obrázku 72 působí úplně zadaná soustava π . Uložení vázaného tělesa má být nepohyblivé staticky určité. Zkontrolujte uložení tělesa a jsou-li splněny podmínky zadání určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly.

Na základě kinematického rozboru zkontrolujeme nepohyblivost uložení, je-li splněna uvolníme těleso, určíme množinu neznámých nezávislých parametrů a sestavíme podmínky statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru. Jejich řešením určíme neznámé nezávislé parametry. Viz kapitola 7.1.



Obr. 6.21:

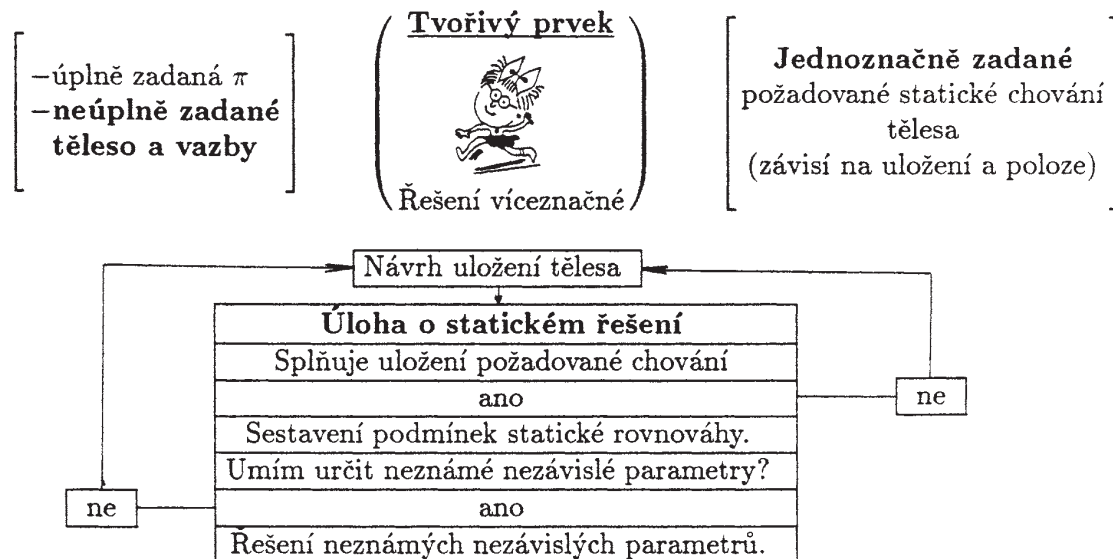
Nahrazení úplně určené soustavy sil staticky ekvivalentní soustavou sil - zpravidla jedinou silou.

Je-li to možné, nahraďte soustavu úplně zadaných sil π_1 jedinou silou. Nutná a postačující podmínka pro nahrazení silové soustavy jedinou silou je $\vec{F}_V \neq 0 \wedge \vec{F}_V \cdot \vec{M}_V = 0$. Je-li tato podmínka splněna, pak z podmínky statické ekvivalence musí platit $\vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 = \vec{F}_{ek} \wedge \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2$.

B) Úlohy na syntézu

Úlohy na syntézu mají ve strojírenství nejrůznější charakter. My se omezíme pouze na úlohy charakteristické pro studium statiky na strojírenské fakultě, které mohou být zadány takto: Soustava těles podle obrázku má být nepohyblivá staticky určitá. Po eventuálních úpravách vazeb zaručujících podmínky zadání určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly. Charakter úprav souvisí s tvůrčím přístupem studenta. Řešení je víceznačné, přičemž jednotlivá řešení jsou operačně různě náročná.

Charakter úloh o syntéze můžeme schématicky znázornit takto:



Obr. 6.22:

C Úlohy o stabilitě

Řešíme-li reálný problém, pak musíme uvažovat odchylky. Posouzení významnosti odchylek z hlediska řešeného problému není jednoduché a v řadě případů je nelze provést pouze na základě představy nebo odhadu. Jestliže uvažujeme odchylky, pak je nutné je zahrnout do soustavy úplně určených silových prvků, která pak obsahuje soustavu silových prvků jmenovitých hodnot π_j a soustavu π' zahrnující odchylky, tedy $\pi_o = \pi_j \cup \pi'$.

Počet použitelných statických podmínek určíme:

a) v případě že odchylky neuvažujeme ze soustavy

$$\pi_\nu = \pi_j \cup \pi_R \implies \nu$$

b) v případě s odchylkami ze soustavy

$$\pi_{\nu_o} = \pi_j \cup \pi_R \cup \pi' \implies \nu_o$$

Míru statické stability pak určíme ze vztahu

$$q = \nu_o - \nu \quad (6.10)$$

Uložení tělesa je staticky stabilní jestliže $q = 0$, přičemž rozlišujeme uložení

- úplně stabilní – $q = 0 \wedge \nu_o = \nu = 6$
- částečně stabilní – $q = 0 \wedge \nu_o \neq 6$
- nestabilní – $q \neq 0$

Uvedený rozbor je proveden za předpokladu, že pro styk můžeme použít model NNTN styku. Z příkladu na obrázku je zřejmé, že při uvažování odchylek je nutné také posoudit model styku. Odtud vyplývá, že řešení reálných problémů statiky je vždy komplexní činnost, velmi často interdisciplinárního charakteru.

6.6 Těžiště těles

6.6.1 Určení tíhové síly a polohy těžiště tělesa

Určení polohy těžiště a tíhy součástky resp. celé konstrukce je častým a běžným úkolem technické praxe. Konstrukční návrh je často ovlivněn snahou o docílení takové polohy těžiště, aby konstrukce měla požadované provozní vlastnosti (s tím souvisí např. stabilita konstrukcí, vibrace rotorů, chování vozidel při rychlém průjezdu zatáčkou a pod.)

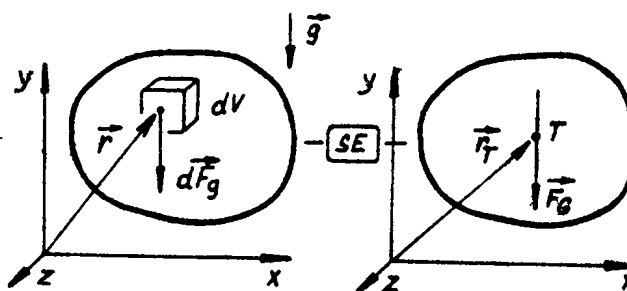
Vyjádření silového působení na těleso nacházející se v gravitačním poli Země patří mezi základní statické úlohy a bylo předmětem předchozího studia. Z fyziky a matematiky (a z praxe) je známo: jestliže zavěšíme těleso na lano upevněné v jeho těžišti, pak těleso pootočené okolo těžiště zůstává v libovolné poloze v klidu (ve statické rovnováze).

Vyšetřování polohy těžiště lze tedy provést experimentálně na reálném tělese. Setkáme se přitom s problémem realizace zavěšení tělesa v těžišti (těžiště je běžně uvnitř tělesa, může být i vně prostorové oblasti Ω , kterou těleso zaujímá), protože lano lze vázat pouze k povrchu tělesa. Dalším problémem je pak volba takové strategie, aby proces experimentálního hledání polohy těžiště měl co nejméně kroků.

Významnou roli v řešení hraje potřeba znát polohu těžiště už ve fázi konstrukčního návrhu, kdy těleso ještě reálně neexistuje. Z fyziky a matematiky je známo, že těžiště nějaké oblasti (prostorové 3D, plošné 2D nebo křivkové 1D) je možno při znalosti integrálního počtu určit poměrně snadno výpočtem.

Protože pojmy tíhová síla a těžiště souvisejí se silovým působením (rozloženým v objemu tělesa), budeme je dále rozvíjet a zpřesňovat na základě znalostí získaných v předchozích kapitolách.

Oblast Ω , kterou zaujímá těleso, můžeme disjunktně rozdělit na elementární prostorové podoblasti o objemu dV . Každé podoblasti přiřadíme bod, který daná podoblast obsahuje. Silovou interakci této podoblasti s gravitačním polem Země vyjádříme v daném bodě elementární tíhovou silou $d\vec{F}_G$ viz obr. 6.23. Vzhledem k vlastnostem gravitačního pole a běžné velikosti strojírenských těles je možno nositelky soustavy elementárních tíhových sil považovat za rovnoběžné. Mají svislý směr \vec{e}_s a jsou orientovány směrem k Zemi. Na těleso tedy působí soustava π_g rovnoběžných a stejně orientovaných elementárních sil v prostoru $d\vec{F}_G = \vec{g} \rho dV = \vec{o} dV = g \rho dV \cdot \vec{e}_s = o dV \cdot \vec{e}_s = dF_G \cdot \vec{e}_s$. Veličina $\vec{o}(x, y, z)$ je měrná objemová síla jejíž velikost $o(x, y, z) = \rho(x, y, z) \cdot g$ je obecně u nehomogenního tělesa v oblasti Ω proměnná.



Obr. 6.23:

Zvolíme-li globální souřadnicový systém pevně spojený s tělesem, pak při natačení tělesa je soustava elementárních tíhových sil π_g vzhledem k tomuto s.s. soustavou rotujících rovnoběžných sil. Podle kapitoly 5 má každá taková soustava osu, která při libovolném natočení tělesa prochází stále jedním bodem - střediskem soustavy π_g označovaným běžně jako těžiště. Podle kapitoly 5 můžeme soustavu π_g nahradit staticky ekvivalentní silou \vec{F}_G jejíž nositelka je shodná s její osou. Tíhová síla je tedy staticky ekvivalentní náhradou soustavy elementárních tíhových

sil a její nositelka prochází těžištěm tělesa. Tíhovou sílu a polohu těžiště určíme z podmínky statické ekvivalence silových soustav π_g a π_G viz obr. 6.23.

$$\int_{\Omega} \vec{g} \rho dV = \vec{F}_V^g = \vec{F}_V^G = \vec{F}_G \quad \text{a} \quad \int_{\Omega} \vec{r} \times \vec{g} \rho dV = \vec{M}_{V_o}^g = \vec{M}_{V_o}^G = \vec{r}_T \times \vec{F}_G \quad (6.11)$$

Pak tíhová síla \vec{F}_G a polohový vektor těžiště v souřadnicovém systému (O,x,y,z) jsou jednoznačně určeny vztahy

$$\vec{F}_G = \int_{\Omega} d\vec{F}_G = \int_{\Omega} g \rho dV \cdot \vec{e}_s = F_G \cdot \vec{e}_s \quad \text{a} \quad \vec{r}_T = \frac{\int_{\Omega} \vec{r} g \rho dV}{\int_{\Omega} g \rho dV}, \quad (6.12)$$

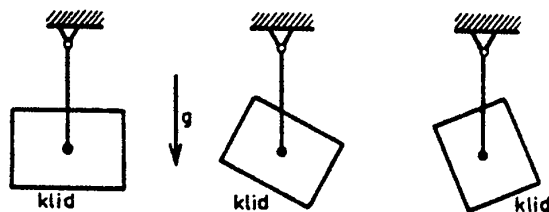
kde $\vec{r}_T = x_T \vec{i} + y_T \vec{j} + z_T \vec{k}$.

Souřadnice těžiště

$$x_T = \frac{\int_{\Omega} g \rho x dV}{\int_{\Omega} g \rho dV}; \quad y_T = \frac{\int_{\Omega} g \rho y dV}{\int_{\Omega} g \rho dV}; \quad z_T = \frac{\int_{\Omega} g \rho z dV}{\int_{\Omega} g \rho dV} \quad (6.13)$$

Vlastnosti těžiště je možno shrnout do těchto bodů:

1. Těžiště je bod tělesa, kterým prochází osa soustavy elementárních tíhových sil při libovolném natočení tělesa, viz. obr. 6.24.
2. Tíhová síla je staticky ekvivalentní se soustavou elementárních tíhových sil. Při libovolném natočení tělesa má vzhledem k souřadnicovému systému spojenému se Zemí stejnou velikost, směr a smysl a její nositelka prochází těžištěm.



Obr. 6.24:

Po analýze vlastností gravitačního pole Země, materiálů strojírenských těles a vztahů pro určení polohy těžiště můžeme vyslovit věty, které nám určování polohy těžiště v řadě úloh usnadní:

1. Vzhledem k nepodstatné proměnnosti hodnoty $g(x, y, z)$ v oblasti Ω je možno gravitační pole považovat za homogenní a uvažovat, že $g(x, y, z) = \text{konst}$.
2. Z hlediska integrace mohou nastat případy, kdy geometrii oblasti Ω lze nebo nelze popsat jedinou integrovanou funkcí $\Omega(x, y, z)$. V případě možnosti a potřeby lze oblast Ω rozdělit na konečnou množinu n podoblastí Ω_i , které lze popsat funkcemi $\Omega_i(x, y, z)$, pro kterou platí $\Omega = \cup \Omega_i$. Pak

$$\vec{F}_G = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} g \rho dV \cdot \vec{e}_s \quad \text{a} \quad \vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \vec{r} g \rho dV}{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} g \rho dV} \quad (6.14)$$

3. Z hlediska proměnnosti $\rho(x, y, z)$ lze těleso považovat za materiálově:
 - a) homogenní $\rho(x, y, z) = \text{konst}$ v oblasti Ω .

$$\vec{F}_G = g \rho \int_{\Omega} dV \cdot \vec{e}_s = g \rho V \cdot \vec{e}_s; \quad \vec{r}_T = \frac{\int_{\Omega} \vec{r} dV}{\int_{\Omega} dV} = \frac{\int_{\Omega} \vec{r} dV}{V} \quad (6.15)$$

- b) po částech homogenní $\rho_i(x, y, z) = \text{konst}$ v podoblastech Ω_i .

$$\vec{F}_G = g \sum_{i=1}^n \rho_i \int_{\Omega_i} dV \cdot \vec{e}_s = g \sum_{i=1}^n \rho_i V_i \cdot \vec{e}_s; \quad \vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \int_{\Omega_i} \vec{r} dV}{\sum_{i=1}^n \rho_i \int_{\Omega_i} dV} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \int_{\Omega_i} \vec{r} dV}{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i} \quad (6.16)$$

- c) nehomogenní $\rho(x, y, z)$

4. Jestliže po rozdělení oblasti Ω po částech homogenního tělesa na n homogenních podoblastí Ω_i známe polohu těžišť \vec{r}_{T_i} a hmotnost $m_i = \rho_i V_i$ jednotlivých podoblastí, pak polohu \vec{r}_T těžiště oblasti Ω určíme ze vztahu

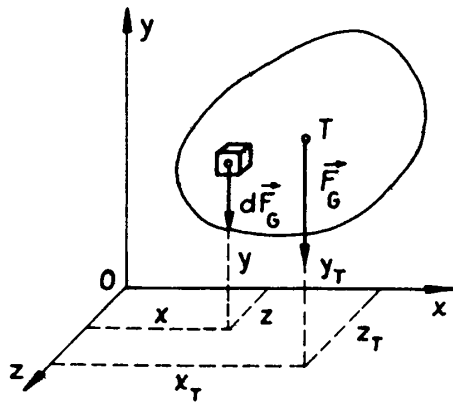
$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_{T_i} \rho_i V_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i V_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_{T_i} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{r}_{T_i} \cdot m_i \quad (6.17)$$

5. Výhodná volba typu souřadnicového systému s přihlédnutím k charakteristické geometrii tělesa umožní snížit operační složitost řešení. Zpravidla volíme

- a) kartézský s.s. (O,x,y,z) pro obecný tvar tělesa kdy $dV = dx dy dz$
 - b) cylindrický s.s. (O,r, φ ,z) pro osově symetrická tělesa kdy $dV = r dr d\varphi dz$
 - c) sférický s.s. (O,r, φ , ψ) pro středově symetrická tělesa kdy $dV = r^2 dr d\varphi d\psi$

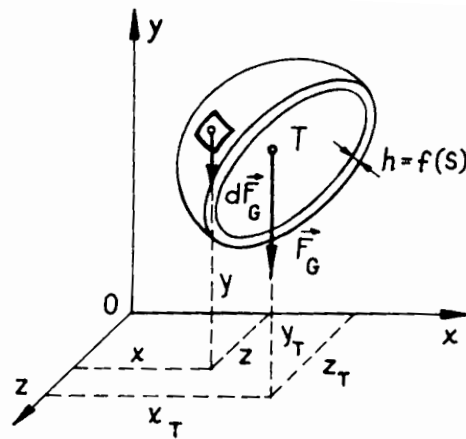
6. Operační složitost řešení lze významně snížit zavedením výpočtových modelů geometrie těles z hlediska jejich rozměrnosti

- a) pokud jsou všechny tři rozměry tělesa řádově stejné je třeba použít 3D model geometrie a integraci provádět přes prostorovou oblast Ω , viz obr. 6.25



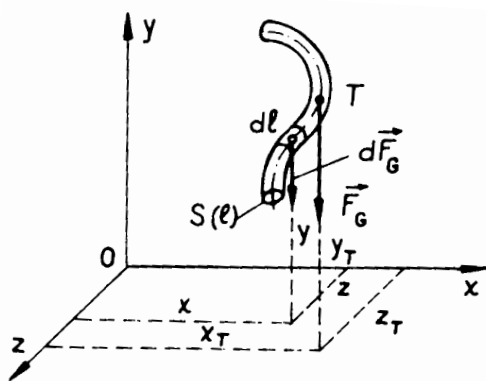
Obr. 6.25:

- b) v případě tenkostěnných těles, kdy jeden rozměr (obecně proměnná tloušťka tělesa $t(S)$) je podstatně menší než ostatní dva (rozměry střednicové plochy), je vhodné použít 2D model geometrie kdy $dV = t(S) dS$ a integrace je prováděna přes plošnou oblast Γ střednicové plochy, viz obr. 6.26



Obr. 6.26:

- c) pokud je jeden z rozměrů tělesa podstatně větší než ostatní dva (prutová tělesa definovaná střednicí γ délky l a příčným průřezem Ψ o obecně proměnné ploše $S(l)$), jehož rozměry jsou významně menší než délka střednice) je vhodné použít 1D model geometrie kdy $dV = S(l) dl$ a integrace je prováděna podél křivky γ (střednice prutu), viz obr. 6.27



Obr. 6.27:

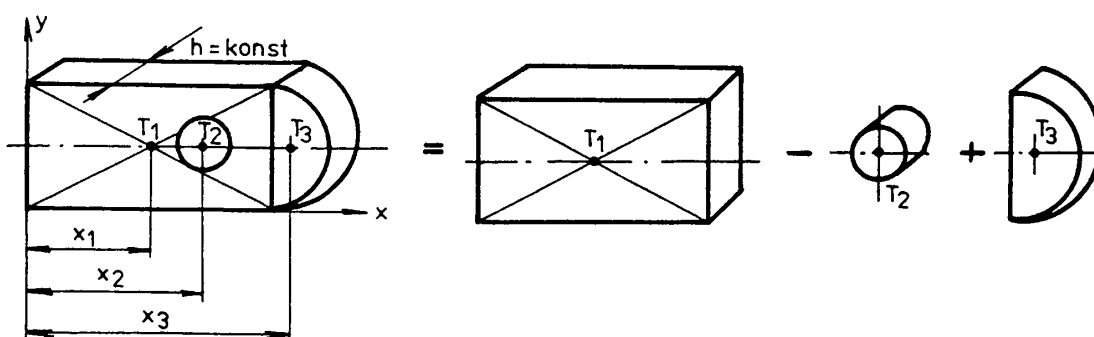
- Jestliže má homogenní těleso bod, osu nebo rovinu symetrie, pak těžiště tělesa leží v tomto útvaru symetrie.
- Těžiště tělesa je jednoznačně určeno průsečíkem os soustavy elementárních tíhových sil pro dvě polohy tělesa. Tato skutečnost nám umožní nalézt polohu těžiště experimentálně na základě dvou měření, na rozdíl od hledání strategií pokus – omyl.

6.6.2 Metody určování polohy těžiště

Určení polohy těžiště lze provést některou z následujících metod:

- Integrací podle analytických definičních vztahů. Tento způsob určování těžiště má význam především pedagogický, protože je používán pro určování těžiště oblasti ohraničené jednoduše matematicky popsatelnou plochou nebo křivkou. Poloha těžiště těchto oblastí byla integrací již určena a proto se jedná o procvičení nebo ověření znalostí řešení určitého integrálu – viz řešené úlohy v závěru kapitoly.

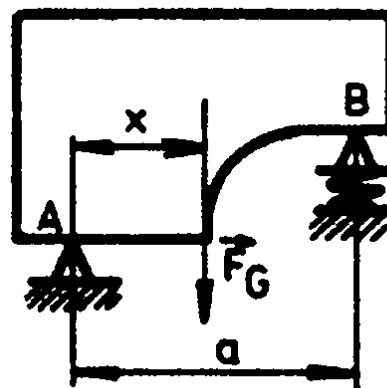
2. Numerickými integračními metodami. V případech, kdy oblast je ohraničená složitější plochou nebo křivkou nebo hranice oblasti není vyjádřena v analytickém tvaru, ale pouze v diskrétních bodech, může být vhodné použití numerických integračních metod, které v současné době patří k základnímu softwarovému vybavení osobního počítače.
3. Rozdělením tělesa na jednoduché podoblasti, jejichž těžiště i hmotnosti byly určeny analyticky a jsou známé, viz obr. 6.28. Při určování těžiště celého tělesa využíváme součtových vlastností integrálu spočívajících v tom, že integrál součtu (rozdílu) je roven součtu (rozdílu) integrálů – viz řešení úlohy v závěru kapitoly. K tomuto způsobu patří i postup, kdy těleso složitějšího tvaru aproximujeme konečným počtem jednoduchých a přesně definovaných geometrických útvarů (prvků), přičemž aproximace tělesa není primární z hlediska určení těžiště (např. v MKP).



Obr. 6.28:

4. Experimentální určení polohy těžiště. Polohu těžiště můžeme určit na základě určení polohy dvou různoběžných os tak, jak to bylo popsáno na začátku této kapitoly. V důsledku obtíží souvisejících s realizací závěsu a určení polohy osy v tělese se tohoto způsobu používá pouze pro odhad polohy těžiště (zavěšování břemen při přemísťování těles jeřábem).

Můžeme-li těleso vhodně podepřít a změřit síly působící v podporách (obr. 6.29), pak na základě řešení statické rovnováhy vázaného tělesa, kterou se budeme zabývat v následující kapitole, lze určit dvě souřadnice těžiště. Opakováním tohoto postupu v pootočené poloze určíme zbývající souřadnici.

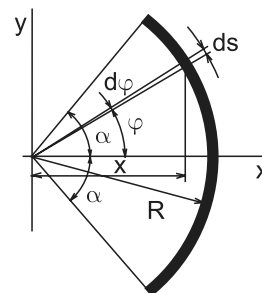


Obr. 6.29:

6.6.3 Řešené úlohy

Algoritmus výpočtového řešení polohy těžiště tělesa při použití popsáných výpočtových modelů geometrie je předveden při řešení následujících praktických úloh.

T1 Střednice homogenního tenkého drátu konstantního průměru d je zakřivena do tvaru kruhového oblouku obr. 6.30. Určete polohu těžiště, je-li dán poloměr zakřivení střednice R a středový úhel 2α .



Obr. 6.30:

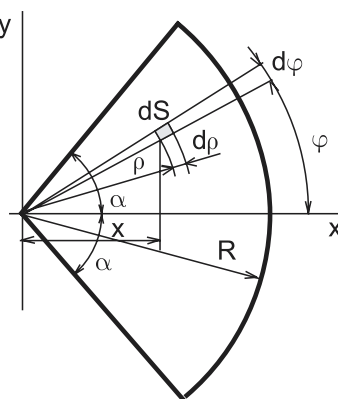
$$x = R \cos \varphi; ds = R d\varphi$$

$$x_T = \frac{\int_{\gamma} x ds}{\int_{\gamma} ds} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; y_T = z_T = 0 \quad (\text{symetrie})$$

T2 Určete polohu těžiště homogenního tenkého drátu konstantního průměru d , jehož střednice má tvar půlkružnice. Pro řešení využijte Pappus-Guldinovu větu, výsledek zkontrolujte pomocí vztahu odvozeného v **T1**.

Rotací půlkružnice kolem osy y vznikne plášť koule. Podle první Pappus-Guldinovy věty je plocha pláště rotačně symetrické plochy (zde koule) dána součinem délky tvořící křivky (zde půlkružnice) a délky dráhy, kterou při rotaci opíše její těžiště. Pak ze vztahu $S = 2\pi x_T \cdot \pi R = 4\pi R^2$ lze určit polohu těžiště půlkružnice $x_T = \frac{2R}{\pi}$.

T3 Homogenní deska konstantní tloušťky t má tvar kruhové výseče (obr. 6.31). Určete polohu těžiště ve střednicové rovině desky, je-li dán poloměr r a středový úhel 2α .



Obr. 6.31:

$$x = \rho \cos \varphi; dS = \rho d\rho d\varphi; y_T = z_T = 0 \quad (\text{symetrie})$$

$$x_T = \frac{\int_{\Gamma} x dS}{\int_{\Gamma} dS} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^R \rho^2 d\rho \cos \varphi d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^R \rho d\rho d\varphi} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

T4 Homogenní deska konstantní tloušťky t má tvar kruhové úseče. Určete polohu těžiště ve střednicové rovině desky, je-li dán poloměr r a středový úhel 2α . Při řešení využijte výsledek řešení úlohy **T3**.

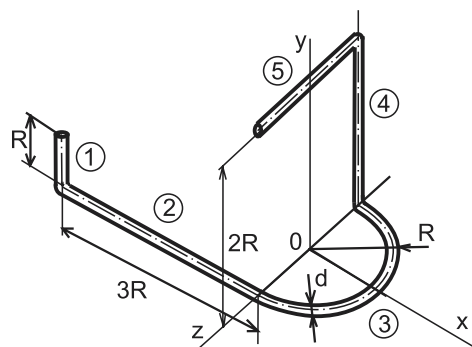
Kruhovou úseč obdržíme oddělením trojúhelníku od kruhové výseče. Souřadnice jejího těžiště

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^2 x_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \alpha R^2 + \frac{2}{3} R \cos \alpha \cdot (-R^2 \sin \alpha \cos \alpha)}{\alpha R^2 - R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

T5 Určete polohu těžiště půlkruhové homogenní desky konstantní tloušťky t . Pro řešení využijte Pappus-Guldinovu větu, výsledek zkontrolujte pomocí vztahu odvozeného v **T3**.

Rotací půlkruhu kolem osy y vznikne koule. Podle druhé Pappus-Guldinovy věty je objem rotačně symetrického tělesa (zde koule) dán součinem obsahu tvořící plochy (zde půlkruhu) a délky dráhy, kterou při rotaci opíše její těžiště. Pak ze vztahu $V = 2\pi x_T \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3$ lze určit polohu těžiště půlkruhu $x_T = \frac{4R}{3\pi}$.

T6 Určete polohu těžiště součásti znázorněné na obrázku obr. 6.32, která je zhotovena z homogenního tenkého drátu konstantního průměru d .

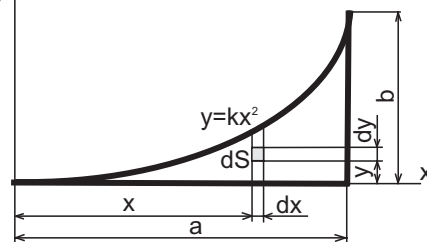


Obr. 6.32:

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^5 x_{T_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^5 l_i} = -\frac{11}{16 + 2\pi} R$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^5 y_{T_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^5 l_i} = \frac{13}{16 + 2\pi} R; \quad z_T = \frac{\sum_{i=1}^5 z_{T_i} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^5 l_i} = \frac{2}{8 + \pi} R$$

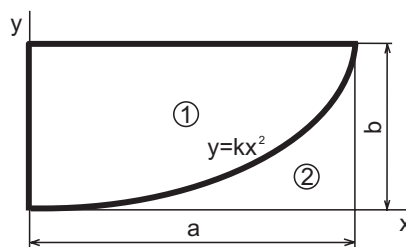
T7 Střednicová plocha homogenní desky konstantní tloušťky t , znázorněné na obrázku obr. 6.33 má tvar parabolického trojúhelníka. Určete polohu těžiště desky.



Obr. 6.33:

$$x_T = \frac{\int_{\Gamma} x dS}{\int_{\Gamma} dS} = \frac{\int_0^a \int_0^y dy x dx}{\int_0^a \int_0^y dy dx} = \frac{3}{4} a; \quad y_T = \frac{\int_{\Gamma} y dS}{\int_{\Gamma} dS} = \frac{\int_0^a \int_0^y y dy dx}{\int_0^a \int_0^y dy dx} = \frac{3}{10} b; \quad z_T = 0$$

T8 Střednicová plocha homogenní desky konstantní tloušťky t je znázorněna na obrázku obr. 6.34. Při kontrole využijte výsledek řešení předchozí úlohy.



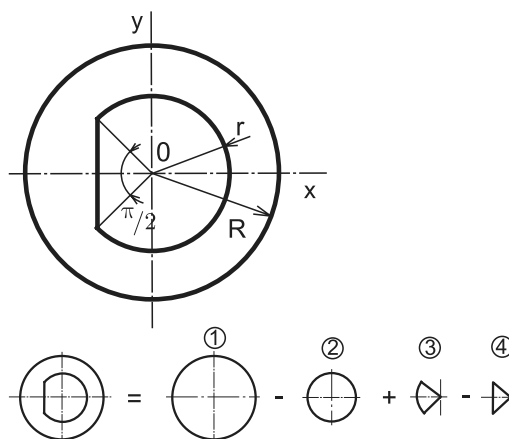
Obr. 6.34:

$$x_T = \frac{\int_0^a \int_y^b dy x dx}{\int_0^a \int_y^b dy dx} = \frac{3}{8} a; \quad y_T = \frac{\int_0^a \int_y^b y dy dx}{\int_0^a \int_y^b dy dx} = \frac{3}{5} b; \quad z_T = 0$$

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^2 x_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a b + \frac{3}{4} a \cdot \left(-\frac{ab}{3}\right)}{a b - \frac{ab}{3}} = \frac{3}{8} a; \quad y_T = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{\frac{b}{2} \cdot a b - \frac{3}{10} b \cdot \frac{ab}{3}}{a b - \frac{ab}{3}} = \frac{3}{5} b$$

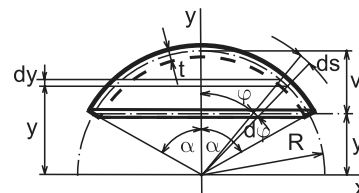
T9 Určete polohu těžiště tenké homogenní desky konstantní tloušťky t , znázorněné na obrázku obr. 6.35.

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^4 x_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^4 S_i} = \frac{\sqrt{2} r}{6\pi \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) + 3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$$



Obr. 6.35:

T10 Určete polohu těžiště tenké homogenní skořepiny konstantní tloušťky t , znázorněné na obrázku obr. 6.36. Střednicová plocha skořepiny má tvar kulového vrchlíku, určeného poloměrem R a úhlem α .



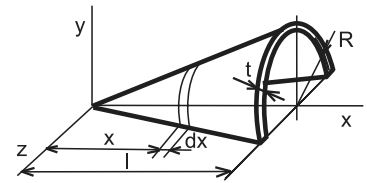
Obr. 6.36:

$$y = R \cos \varphi; \quad \rho = R \sin \varphi; \quad ds = R d\varphi; \quad dS = 2\pi \rho ds = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$y_T = \frac{\int_0^\alpha 2\pi R^3 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\int_0^\alpha 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi} = \frac{\sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} R; \quad x_T = z_T = 0$$

Pro $\alpha = \pi/2$ (plášť polokoule) je $y_T = \frac{R}{2}$.

T11 Určete polohu těžiště tenké homogenní skořepiny konstantní tloušťky t , jejíž střednicová plocha má tvar poloviny pláště kužele, charakterizovaného poloměrem r a výškou l (obr. 6.37).

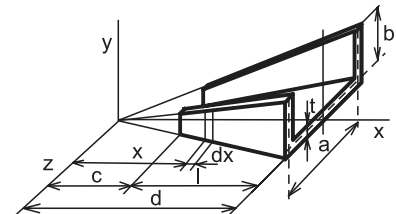


Obr. 6.37:

$$r_x = \frac{R}{l} x; \quad y_{T,x} = \frac{2R}{\pi l} x; \quad dS = \frac{\pi R}{l} x dx$$

$$x_T = \frac{\int_{\Gamma} x dS}{\int_{\Gamma} dS} = \frac{\int_0^l \frac{R}{l} x^2 dx}{\int_0^l \frac{R}{l} x dx} = \frac{2}{3} l; \quad y_T = \frac{\int_{\Gamma} y dS}{\int_{\Gamma} dS} = \frac{\int_0^l \frac{R}{l} x \frac{2R}{\pi l} x dx}{\int_0^l \frac{R}{l} x dx} = \frac{4R}{3\pi}; \quad z_T = 0$$

T12 Určete polohu těžiště tenké homogenní skořepiny konstantní tloušťky t , jejíž střednicová plocha má tvar poloviny pláště komolého jehlanu, charakterizovaného rozměry a , b , l_1 a l_2 (obr. 6.38).

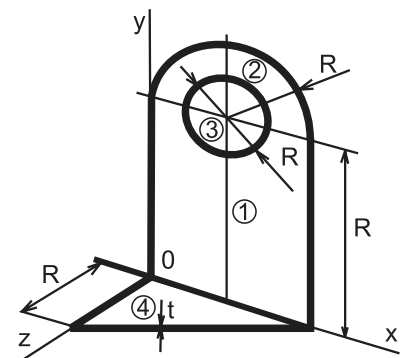


Obr. 6.38:

$$a_x = \frac{a}{d} x; \quad b_x = \frac{b}{d} x; \quad y_{T,d} = \frac{b^2}{a+2b}; \quad y_{T,x} = \frac{y_{T,d}}{d} x; \quad dS_x = (a_x + 2b_x) dx = \frac{a+2b}{d} x dx$$

$$x_T = \frac{\int_c^d \frac{a+2b}{d} x^2 dx}{\int_c^d \frac{a+2b}{d} x dx} = \frac{2}{3} \frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}; \quad y_T = \frac{\int_c^d \frac{b^2}{d(a+2b)} \frac{a+2b}{d} x^2 dx}{\int_c^d \frac{a+2b}{d} x dx} = \frac{2}{3} \frac{b^2}{d(a+2b)} \frac{d^3 - c^3}{d^2 - c^2}$$

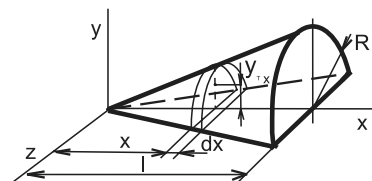
T13 Určete polohu těžiště tenkého homogenního tělesa konstantní tloušťky t , znázorněného na obrázku obr. 6.39.



Obr. 6.39:

$$\begin{aligned}
 x_T &= \frac{\sum_{i=1}^4 x_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^4 S_i} = \\
 &= \frac{R \cdot 2R^2 + R \cdot \frac{\pi R^2}{2} + R \cdot \left(-\frac{\pi R^2}{4}\right) + \frac{2}{3} R \cdot R^2}{R^2 + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} + R^2} = \frac{32 + 3\pi}{36 + 3\pi} R \\
 y_T &= \frac{\sum_{i=1}^4 y_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^4 S_i} = \frac{\frac{R}{2} \cdot 2R^2 + \left(R + \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{2} + R \cdot \left(-\frac{\pi R^2}{4}\right) + 0 \cdot R^2}{2R^2 + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} + R^2} = \frac{20 + 3\pi}{36 + 3\pi} R \\
 z_T &= \frac{\sum_{i=1}^4 z_{T_i} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^4 S_i} = \frac{0 \cdot 2R^2 + 0 \cdot \frac{\pi R^2}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{\pi R^2}{4}\right) + \frac{R}{3} \cdot R^2}{2R^2 + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} + R^2} = \frac{1}{36 + 3\pi} R
 \end{aligned}$$

T14 Určete polohu těžiště homogenního tělesa tvaru poloviny kužele o výšce l a poloměru r , znázorněného na obrázku obr. 6.40.

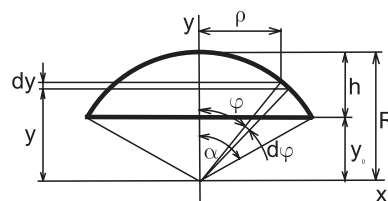


Obr. 6.40:

$$\begin{aligned}
 y_{T,S_i} &= \frac{4R}{3\pi}; \quad y_{T,S_x} = \frac{4r_x x}{3\pi l}; \quad dV = \frac{\pi}{2} r_x^2 dx = \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{l^2} x^2 dx; \quad z_T = 0 \\
 x_T &= \frac{\int_{\Omega} x dV}{\int_{\Omega} dV} = \frac{\int_0^l \frac{\pi R^2}{2l^2} x^3 dx}{\int_0^l \frac{\pi R^2}{2l^2} x^2 dx} = \frac{3}{4} l; \quad y_T = \frac{\int_{\Omega} y_{T,S_x} dV}{\int_{\Omega} dV} = \frac{\int_0^l \frac{4}{3\pi} \frac{R}{l} \frac{\pi R^2}{2l^2} x^3 dx}{\int_0^l \frac{\pi R^2}{2l^2} x^2 dx} = \frac{R}{\pi}
 \end{aligned}$$

T15 Určete polohu těžiště homogenních těles tvaru kulové úseče a kulové výseče, znázorněných na obrázku obr. 6.41 a charakterizovaných poloměrem R a úhlem α .

$$\begin{aligned}
 h &= R - y_0; \quad \rho^2 = R^2 - y^2; \\
 dV &= \pi \rho^2 dy = \pi (R^2 - y^2) dy; \quad x_T = z_T = 0
 \end{aligned}$$



Obr. 6.41:

$$\text{Úseč: } y_T = \frac{\int_{y_0}^R \pi y (R^2 - y^2) dy}{\int_{y_0}^R \pi (R^2 - y^2) dy} = \frac{\frac{R^4}{4} + \frac{y_0^2}{2} \left(\frac{y_0^2}{2} - R^2 \right)}{\frac{2}{3} R^3 + y_0 \left(\frac{y_0^2}{3} - R^2 \right)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{2} - 1 \right)}{\frac{2}{3} + \cos \alpha \left(\frac{\cos^2 \alpha}{3} - 1 \right)} R$$

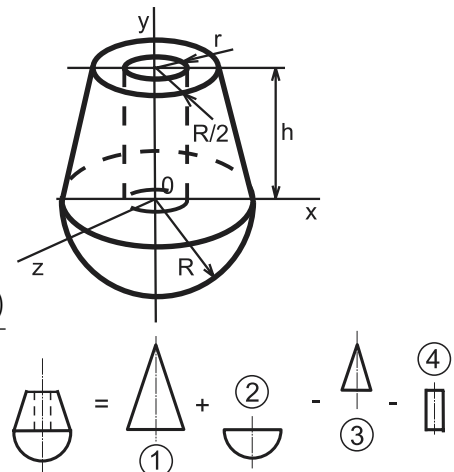
Pro $\alpha = \pi/2$ (polokoule) je $y_T = \frac{3}{8} R$.

$$\text{Výseč: } y_T = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\cos \alpha}{2} \right) R = \frac{3}{4} \left(R - \frac{h}{2} \right).$$

T16 Určete polohu těžiště osově symetrického homogenního složeného tělesa, znázorněného na obrázku obr. 6.42.

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^4 y_{T_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^4 V_i} = \frac{\frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi R^2 h + \left(-\frac{3}{8} R\right) \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{5}{4} h \cdot \left(-\frac{\pi}{12} R^2 h\right) + \frac{h}{2} \cdot \left(-\pi r^2 h\right)}{\frac{2}{3} \pi R^2 h + \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{\pi}{12} R^2 h - \pi r^2 h}$$

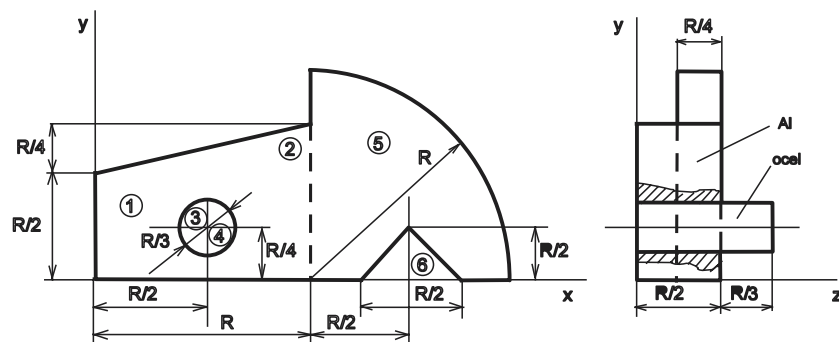
$$x_T = z_T = 0$$



Obr. 6.42:

T17 Určete polohu těžiště složeného, po částech homogenního tělesa, znázorněného na obrázku obr. 6.43.

Podobně jako v předchozích případech provedeme dekompozici tělesa na jednotlivé základní podoblasti jejichž objemy a polohy těžišť je možno snadno určit. Pro zvýšení přehlednosti řešení je vhodné použít zápisu do tabulky.



Obr. 6.43:

Podoblast i	ρ_i	V_i	x_{T_i}	y_{T_i}	z_{T_i}
1	ρ_{Al}	$1/4 \cdot R^3$	$1/2 \cdot R$	$1/4 \cdot R$	$1/4 \cdot R$
2	ρ_{Al}	$1/16 \cdot R^3$	$2/3 \cdot R$	$7/12 \cdot R$	$1/4 \cdot R$
3	ρ_{Al}	$-\pi/72 \cdot R^3$	$1/2 \cdot R$	$1/4 \cdot R$	$1/4 \cdot R$
4	ρ_{oc}	$5\pi/216 \cdot R^3$	$1/2 \cdot R$	$1/4 \cdot R$	$5/12 \cdot R$
5	ρ_{Al}	$\pi/16 \cdot R^3$	$(1 + 4/3\pi) \cdot R$	$4R/3\pi$	$3/8 \cdot R$
6	ρ_{Al}	$-1/32 \cdot R^3$	$3/2 \cdot R$	$1/12 \cdot R$	$3/8 \cdot R$

Souřadnice těžiště tělesa v daném souřadnicovém systému pak určíme ze vztahů

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot x_{T_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot V_i} = \frac{\rho_{Al} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{\pi}{144} + \frac{\pi}{16} + \frac{1}{12} - \frac{3}{64} \right) + \rho_{oc} \frac{5\pi}{432}}{\rho_{Al} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{32} \right) + \rho_{oc} \frac{5\pi}{216}} \cdot R$$

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot y_{T_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot V_i} = \frac{\rho_{Al} \left(\frac{1}{16} + \frac{7}{192} - \frac{\pi}{288} + \frac{1}{12} - \frac{1}{384} \right) + \rho_{oc} \frac{5\pi}{864}}{\rho_{Al} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{32} \right) + \rho_{oc} \frac{5\pi}{216}} \cdot R$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot z_{T_i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^6 \rho_i \cdot V_i} = \frac{\rho_{Al} \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{\pi}{288} + \frac{3\pi}{128} - \frac{3}{256} \right) + \rho_{oc} \frac{25\pi}{2592}}{\rho_{Al} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{\pi}{72} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{32} \right) + \rho_{oc} \frac{5\pi}{216}} \cdot R$$

7 Vázané těleso s vazbami NNTN

7.1 Řešení statické rovnováhy vázaného tělesa.

Na základě předchozího výkladu je zřejmé, že pro vázaná tělesa můžeme z hlediska statické rovnováhy řešit úlohu o statickém řešení a návrh nebo úpravu uložení zajišťující staticky určité uložení tělesa.

Vzhledem k závažnosti těchto úloh pro další studium a praxi rozebereme celý postup podrobněji s názornými ukázkami a formulací postupu z výpočtového hlediska, které je obecnější a v současné době pro řešení praktických problémů vhodnější než řešení grafické.

Variantu úlohy o statickém řešení s grafickým řešením probereme v samostatné kapitole 10. Postup řešení uvedených úloh je konkretizací obecného postupu řešení úloh mechaniky těles a znalostí z předchozích kapitol .

Úloha I.

1. Zadání:

Na těleso T geometricky zadané údaji na obr. 7.1a:

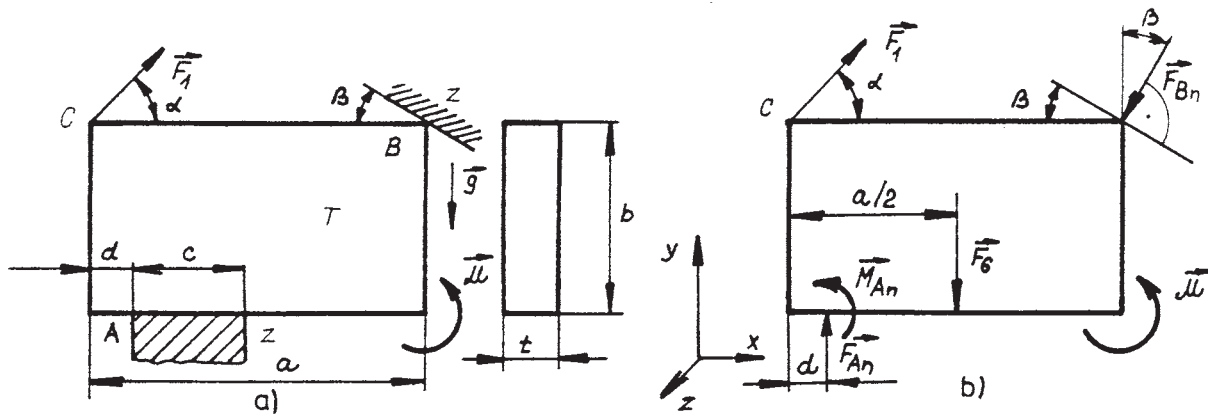
- působí soustava úplně zadaných silových prvků (rozloženého silového působení, sil a silových dvojic) - síla \vec{F}_1 , silová dvojice určená momentem \vec{M} a tíhová síla.
- těleso je vázáno k základnímu tělesu soustavou vazeb, pro které můžeme použít model styku NNTN.
- dále je zadána požadovaná funkce uložení tělesa. Uložení tělesa má být staticky určité.

Úkolem je:

- a) Zkontrolovat zda požadovaná funkce uložení je splněna. Ve staticce je požadovanou funkcí zpravidla statická určitost, je-li splněna, pak je těleso ve statické rovnováze.
- b) V případě, že je těleso ve statické rovnováze, pak určit výsledné stykové síly nebo zadané stykové funkce.

2. Rozbor úlohy:

- a) Kontrola formální správnosti a úplnosti zadání - *Zadání je úplné a správné.*
- b) Klasifikace prostorovosti úlohy nebo přiřazeného modelového objektu. - *Ze zadaných hodnot je zřejmé, že úlohu můžeme řešit jako rovinnou.*
- c) Označení těles. - *Základní těleso označujeme Z nebo v případě, že předmětem řešení je soustava těles číslem 1. Těleso označujeme T, v případě soustav těles dalšími číslicemi 2,3*
- d) Vymezení soustavy úplně zadaných silových prvků. $\pi = \{ \vec{F}_1, \vec{M}, \{d\vec{F}_\Omega\} \} = \{ \vec{F}_1, \vec{M}, \vec{F}_G \}$
- e) Označení a klasifikace vazeb. - *Vazby označujeme velkými písmeny A,B,C,D*



Obr. 7.1:

3. Řešení úlohy:

a) Kinematický rozbor - určení pohyblivosti

vazba A – omezuje posuv ve směru osy y a otáčení kolem osy z

$$A - \text{p.k.d} - \xi = 2$$

vazba B – omezuje posuv ve směru osy x

$$B - \text{o.k.d} - \xi = 1$$

$$i = i_v - (\sum \xi_i - \eta)$$

$$i = 3 - [(2 + 1) - 0] \Rightarrow \boxed{i = 0, \eta = 0}$$

Těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů.

Nepohyblivost je zajištěna stykovými vazbami.

b) Uvolnění tělesa. Viz obr. 7.1b.

Vazba A - jednostranná posuvná k.d (viz odst. 6.3) Ve stykové ploše vazby A zvolíme bod, který označíme A.

Ve zvoleném bodě vyjádříme silové působení ve styku v souladu s odst. 7.3 \vec{F}_A, \vec{M}_A .

Vazba B - obecná k.d - ve stykovém bodě vyjádříme silové působení silou \vec{F}_B .

Vazby A,B jsou podmíněně funkční. Zvolená orientace sil do tělesa odpovídá funkčnosti vazeb. (Pozor - šipky neoznačují smysl sil, ten dosud neznáme, označují pouze předpokládaný smysl. Smysl sil určíme z podmínek statické rovnováhy. Jestliže souřadnice síly určená z podmínky statické rovnováhy má znaménko + resp. — pak síla má předpokládaný resp. opačný smysl.

c) Statický rozbor:

- α) Volba souřadnicového systému. Souřadnicový systém zvolíme libovolně, ale z hlediska řešeného problému vhodně.
- β) Vymezení soustavy neúplně zadaných silových prvků π_R , množiny neznámých nezávislých parametrů a jejich počtu.

$$\pi_R = \{ \vec{F}_A, \vec{F}_B \} \text{ resp. } \{ \vec{F}_A, \vec{M}_A, \vec{F}_B \}$$

Množinu neznámých nezávislých parametrů označíme NP.

$$\text{NP} = \{ F_{A_n}, M_{A_n}, F_{B_n} \}$$

Počet NP je $\mu = 3$, z toho $\mu_F = 2, \mu_M = 1$.

- γ) Klasifikace soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$ a určení počtu použitelných podmínek statické rovnováhy.

$$\pi_\nu = \{ \vec{F}_1, \vec{M}, \vec{F}_G, \vec{F}_A, \vec{M}_A, \vec{F}_B \} - \text{silová soustava } \pi_\nu \text{ je rovinnou silovou}$$

soustavou, další specifikace není zřejmá. Proto v souladu s dříve uvedeným je počet použitelných statických podmínek v základním tvaru

$$\nu = 3, (\nu_F = 2, \nu_M = 1).$$

- δ) Ověření nutné podmínky statické určitosti.

Úloha je staticky určitá, jestliže NP můžeme určit ze statických podmínek, což je splněno jestliže: $\boxed{\mu = \nu}$

Uvážíme-li dále strukturu statických rovnic a neznámých nezávislých parametrů je zřejmé, že silové rovnice rovnováhy obsahují pouze souřadnice sil. Proto neznámé souřadnice momentů nebo polohových parametrů můžeme určit pouze z momentových podmínek, tedy:

$$\boxed{\mu_r + \mu_M \leq \nu_M}$$

Z uvedené úvahy vyplývá tvar nutné podmínky statické určitosti úlohy:

$$\boxed{\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M}$$

V případě zadané úlohy je $\mu = 3, \nu = 3, \mu_M = 1, \nu_M = 1 \implies$ nutná podmínka statické určitosti je splněna a má smysl pokračovat ve statickém řešení.

d) Sestavení statických rovnic

$$F_x : F_1 \cos \alpha - F_{B_n} \sin \beta = 0$$

$$F_y : F_1 \sin \alpha + F_{A_n} - F_{B_n} \cos \beta - F_G = 0$$

$$M_{z_C} : -F_{B_n} \cos \beta a - F_G \frac{a}{2} + F_{A_n} d + M_{A_n} + \mathcal{M} = 0$$

e) Rozbor soustavy statických rovnic

Jedná se o soustavu tří lineárních nehomogenních rovnic o třech neznámých. Tuto soustavu zapíšeme v maticovém tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} F_{A_n} \\ F_{B_n} \\ M_{A_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \beta & 0 \\ 1 & -\cos \beta & 0 \\ d & -a \cos \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -F_1 \cos \alpha \\ F_G - F_1 \sin \alpha \\ F_G \frac{a}{2} - \mathcal{M} \end{bmatrix}$$

$\text{Det } \mathbf{A} = \sin \beta \implies$ pro $\beta \neq 0$ soustava má jednoznačné řešení. Při řešení na počítači neurčíme samostatně hodnotu determinantu. Kontrola případné singularity matice \mathbf{A} je součástí algoritmu řešení soustavy lineárních rovnic.

f) Řešení soustavy statických rovnic.

Vstupní údaje: $a, b, c, d, t, \alpha, \beta, F_1, \mathcal{M}, g$

Výstupní údaje: $F_{A_n}, F_{B_n}, M_{A_n}$

Výstupní údaje určíme buď s použitím malé výpočetní techniky (kalkulačka) nebo na počítači.

4. Zhodnocení výsledků řešení:

1) Kontrola funkčnosti vazeb:

Vazba A: Je-li $F_{A_n} > 0$ - síla orientována do tělesa a $x_o = \frac{M_{zA}}{F_{Az}} \in \langle 0, c \rangle$ pak je vazba A funkční.

Vazba B: Je funkční je-li $F_{B_n} > 0$ - síla je orientována do tělesa.

Vzhledem k tomu, že úlohu řešíme obecně nemůžeme provést konkrétní hodnocení.

5. Formulace závěru

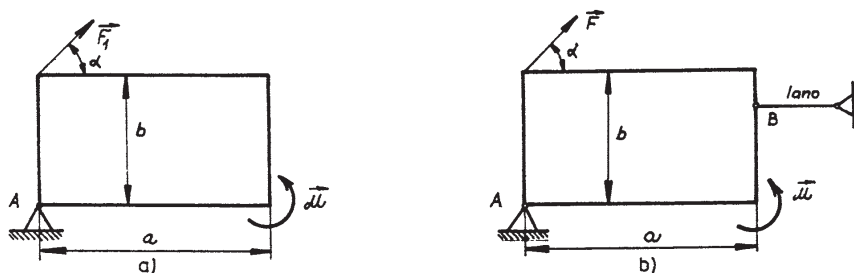
Zadání bylo v plném rozsahu splněno. Je-li $\beta \neq 0$ a stykové vazby funkční je těleso podle obrázku uloženo staticky určitě.

Řešená úloha má charakter úlohy o statickém řešení, na rozdíl od následující úlohy, která se týká úpravy uložení tělesa z hlediska požadované funkce.

Úloha II.

1. Zadání:

Na těleso T geometricky zadané údaji na obr. 7.2a působí soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{\mathcal{M}}\}$. Uložení tělesa má být nepohyblivé a staticky určité. Upravte stykové vazby tak, aby uložení tělesa splňovalo požadované funkce. Po úpravě určete vypočtovým způsobem výsledné stykové síly.



Obr. 7.2:

Úkolem je:

- a) Navrhnout uložení tělesa požadované funkce.
 b) Pro navržené uložení určit výpočtovým způsobem výsledné stykové síly.

Pro navržené uložení, viz obr. 7.2b, provedeme statické řešení s tím, že stále kontrolujeme zda navržené uložení splňuje požadovanou funkci t.j. nepohyblivost a statickou určitost řešené úlohy. Pokud provádíme úpravy uložení, pak je nutné provést nové statické řešení. Postup statického řešení pro navržené uložení byl předmětem úlohy I, proto jej nebudeme opakovat.

Poznámky k vázanému tělesu:

V poznámce uvedeme problémy, které se v úlohách I a II nevyskytují a není vhodné je uvádět na zvláštní úloze nebo uvedené úlohy zbytečně komplikovat.

1. V úloze I se vyskytuje posuvná k.d, pro kterou jsme určili výsledné silové působení \vec{F}_A, \vec{M}_A , viz obr. 7.1b. Stykovým útvarem vazby A v případě rovinného modelu je úsečka. Pro určení rozloženého silového působení $q(x)$ máme dvě podmínky statické ekvivalence. Viz obr. 7.3.

$$F_A = \int_0^c q dx \quad M_A = \int_0^c qx dx \quad (7.1)$$

Z těchto podmínek lze určit jen dva neznámé parametry, proto styková funkce $q(x)$ na úrovni statiky může obsahovat jen dva parametry. Dva parametry obsahuje lineární závislost $q = ax + b$. Po dosazení do vztahu (7.1) obdržíme dvě rovnice pro dvě neznámé.

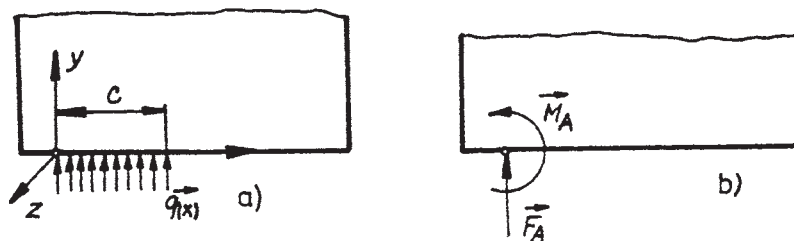
$$F_A = \int_0^c (ax + b) dx = a \frac{c^2}{2} + bc \quad M_A = \int_0^c (ax + b) \cdot x \cdot dx = a \frac{c^3}{3} + b \frac{c^2}{2} \quad (7.2)$$

Po určení a, b dostáváme $q = \frac{6}{c^2} \left(\frac{2M_A}{c} - F_A \right) x + \frac{2}{c} \left(2F_A - \frac{3M_A}{c} \right)$

2. Obsah množiny NP, tvoří ty parametry silového působení, které po uvolnění tělesa neznáme. Pokud pro sílu známe pouze její existenci pak $NP = \{x, y, F_x, F_y, F_z\}$ nebo $\{y, z, F_x, F_y, F_z\}$ případně $\{x, z, F_x, F_y, F_z\}$, což je důsledkem věty o posouvání síly po její nositelce. Ze statického hlediska nelze určit polohu síly, ale pouze její nositelku, proto jednu polohovou souřadnici můžeme zvolit.

Z předchozího výkladu a úloh je zřejmé, že k řešení statické rovnováhy vázaného tělesa je nutné získat názor na silové působení a zkušenosti s řešením statické rovnováhy.

Detailně vypracované úlohy na statické řešení jsou v [2] úlohy Te[1] - Te[17].



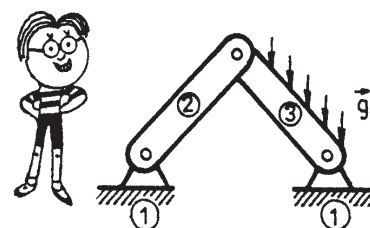
8 Soustavy těles s vazbami typu NNTN.

8.1 Charakteristiky soustav těles.

V souladu s výkladem obsahu pojmu soustava v odst. 2.1, budeme za soustavu těles považovat uspořádání těles vzájemně vázaných vazbami tak, že tělesa se z mechanického hlediska ovlivňují a tvoří celek.

To znamená, že pohyb těles, jejich deformace a silové působení mezi tělesy je důsledkem primárního působení okolí na tělesa soustavy nebo na něm závisí.

V souladu s dříve uvedeným budeme za soustavu těles považovat soustavu reálných, reálně vzájemně vázaných těles. Pro myšlenkové operace (úvahy týkající se tvorby a řešení problémů na soustavách těles) budeme k soustavě těles přiřazovat abstraktní útvary - *systémy těles*. Protože naším primárním zájmem jsou soustavy, budeme hovořit o soustavách i když pracovat budeme převážně se systémy, které přiřadíme k těmto soustavám z hlediska řešeného problému.



Obr. 8.1:

Na rozlišovací úrovni statiky je základním prvkem soustavy těles těleso. Je to nejjednodušší prvek, který budeme ve statice uvažovat a také uvolňovat. Je samozřejmé, že se můžeme zabývat i prvky, které jsou částí tělesa. Ty však budou předmětem našeho zájmu až v pružnosti pevnosti. Proto pro předmět statika je základním prvkem těleso.

Se soustavami těles se setkáváme všude kolem sebe a již z běžného života a předchozího vzdělání víme, že soustavy těles jsou nejrůznějšího charakteru. Liší se počtem, tvarem, podstatou, funkcí, ... těles, různým charakterem vazeb i chováním celé soustavy. Předmětem zájmu v technice jsou soustavy s požadovaným funkčním chváním. Jsou to soustavy charakteru technických objektů - *technické soustavy*. Na počátku studia strojínského inženýrství není možné zabývat se detailně přehledem a klasifikací různých typů soustav. To je třeba vytvářet postupně v souladu s celkovým rozvojem znalostí. Již ve statice musíme klasifikovat a rozlišovat soustavy podle hledisek, která odpovídají úrovni a obsahu látky v předmětu statika. Soustavy těles budeme rozlišovat:

1. Podle charakteru vazeb:

- soustava těles vázaných silovými vazbami
- soustava těles vázaných stykovými vazbami
- soustava těles - vazby jsou silové a stykem

Ve strojírenské praxi se dominantně vyskytují soustavy těles.

2. Podle vztahu k základnímu tělesu

Volná soustava – vazby soustavy jako celku k základnímu tělesu jsou na dané rozlišovací úrovni nepodstatné nebo nerozlišitelné.

Vázaná soustava – vazby soustavy jako celku k základnímu tělesu z hlediska řešeného problému jsou podstatné.

Pro strojírenství jsou typické vázané soustavy těles, tedy soustavy vázané k základnímu tělesu, které je nepohyblivé, což znamená, že žádné silové působení ostatních těles nezmění pohybový stav základního tělesa - mechanický klid.

3. Podle pohyblivosti.

Pohyblivost vyjadřuje omezení pohybu soustavy stykovými vazbami. Tělesa soustavy se mohou vzhledem k základnímu tělesu různým způsobem pohybovat. Struktura pohybu jednotlivých těles soustavy tvoří její pohyblivost. U soustav těles je třeba rozlišovat. Vnější pohyblivost - pohyblivost soustavy jako celku vzhledem k základnímu tělesu. Vnitřní pohyblivost - pohyblivost jednotlivých těles soustavy vzhledem k ostatním tělesům soustavy.

Pohyblivost soustavy má proto vždy dvě stránky, vnější a vnitřní, což vytváří složitou strukturu pohyblivostí soustav těles. Ve statické se omezíme na rozlišování dvou základních typů soustav podle pohyblivosti. Jsou to:

Soustava nepohyblivá - soustava, která je jako celek vzhledem k základnímu tělesu v klidu a také každé těleso soustavy je v klidu. Nepohyblivá soustava je soustava těles, která je vnitřně i vnějškově nepohyblivá.

Soustava a všechna tělesa v klidu \implies soustava nepohyblivá

Soustava je v klidu \iff Soustava jako celek a všechna tělesa jsou v klidu.

Mechanismus - soustava, která je jako celek vázaná k základnímu tělesu nepohyblivě, ale tělesa soustavy jsou vzájemně uložena pohyblivě. Mechanismus obsahuje členy, jejichž pohyb je určený, členy jejichž pohyb je určitý a členy, které zprostředkovávají pohyb mezi členy s určeným a požadovaným pohybem. Členy s určeným pohybem nazýváme **hnací** a členy s požadovaným pohybem **hnané**.

4. Podle konfigurace těles

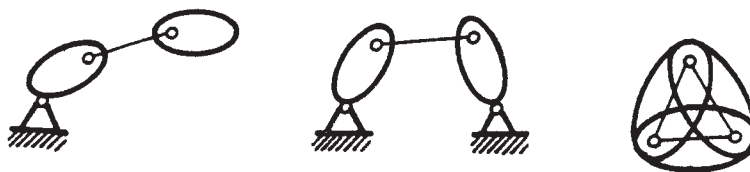
Základní typy seskupení soustav z binárních členů (tělesa vázaná pouze dvěma vazbami) jsou tyto:

Otevřená soustava - soustava skládající se z binárních členů, přičemž pouze jeden člen je vázán k základnímu tělesu. Viz obr. 8.2a

Vně uzavřená soustava - soustava skládající se z binárních členů, přičemž dvě tělesa jsou vázaná se základním tělesem. Viz obr. 8.2b

Vnitřně uzavřená soustava - soustava skládající se z binárních členů, přičemž žádný člen není vázán k základnímu tělesu a soustava tvoří uzavřený obrazec. Viz obr. 8.2c.

Ostatní soustavy jsou kombinací uvedených soustav s tím, že některé členy jsou ternární nebo vícenásobné. Viz odst. 8.2.



Obr. 8.2:

5. Podle statické rovnováhy.

Toto hledisko je ve staticce zásadní. V odst. 7.1 jsme objasnili pojem statická rovnováha jednoho tělesa vázaného k základnímu tělesu, jak z hlediska silového, tak pohybového. Z pohybového hlediska výrok "těleso je ve statické rovnováze" znamená, že těleso je v mechanickém klidu, tedy stykové výslednice nejsou ovlivněny změnami polohy tělesa.

U soustav těles musíme rozlišovat pohyb a stykové výslednice

vnější - pohyb soustavy jako celku vzhledem k základnímu tělesu.

- stykové výslednice po uvolnění soustavy od základního tělesa

vnitřní - vzájemný pohyb těles

- stykové výslednice mezi tělesy

U soustav těles rozlišujeme statickou rovnováhu:

vnější - soustava jako celek je ve statické rovnováze, jednotlivá tělesa ve statické rovnováze být nemusí.

vnitřní - jednotlivá tělesa jsou ve statické rovnováze

podmíněnou - soustava jako celek i všechna tělesa jsou ve statické rovnováze.

Je-li soustava v podmíněné statické rovnováze, pak platí následující relace.

Soustava těles je v podmíněné statické rovnováze	\iff	Všetchna tělesa soustavy jsou ve statické rovnováze
--	--------	---

Soustava těles je v podmíněné statické rovnováze	\iff	Soustava těles je ve statické rovnováze vnější i vnitřní
--	--------	--

Nepodmíněná statická rovnováha - vnější i vnitřní statická rovnováha jsou na sobě nezávislé.

Řízená statická rovnováha - vnitřní a vnější statická rovnováha soustavy jsou na sobě závislé, přičemž jedna je řídicí a druhá řízená.

O uvedených typech statické rovnováhy soustav těles je třeba mít zcela jasnou představu, kterou popíšeme na chování automobilu, jehož vlastnosti z hlediska popisu typů statické rovnováhy všichni z každodenní praxe známe. Představme si následující situace.

- a) Automobil stojí se zařazeným rychlostním stupněm a nepohybuje se \implies motor je v klidu, žádná část motoru se nepohybuje \implies nepohybuje-li se auto, nepohybují se části motoru a opačně, nepohybují-li se části motoru, nepohybuje se automobil \implies soustava i její části jsou v **podmíněné statické rovnováze**.
- b) Automobil se zařazeným rychlostním stupněm, rozepnutou spojkou a motorem v chodu. Pohyblivé části motoru nejsou ve statické rovnováze, ale na řidičovi závisí, zda automobil jako celek bude vzhledem k základnímu tělesu ve statické rovnováze - **řízená statická rovnováha**.
- c) Automobil s vyřazeným rychlostním stupněm (jiná soustava), který je jako celek v klidu, ale jednotlivé části motoru se pohybují. Soustava je ve vnější statické rovnováze, ale podmínky vnitřní statické rovnováhy nejsou splněny, přičemž vnější a vnitřní statická rovnováha soustavy jsou **nepodmíněné**.

Jak vyplývá z uvedeného příkladu u technických soustav se můžeme setkat se všemi typy statické rovnováhy. V případě nepodmíněné statické rovnováhy je nutné vyšetřovat vnější a vnitřní statickou rovnováhu samostatně. U řízených soustav je nutné určit stavy, ve kterých nastává buď podmíněná nebo nepodmíněná statická rovnováha. Samostatným případem je rovnováha živých organismů, tou se však v mechanice těles strojního zaměření nezabýváme.

Ve staticce se u soustav těles zaměříme na nejjednodušší typ statické rovnováhy a tou je **podmíněná statická rovnováha**. V podmíněné statické rovnováze jsou všechny nepohyblivé soustavy, protože pro nepohyblivou soustavu platí relace:
Nepohyblivá soustava \iff soustava jako celek a každé těleso soustavy jsou v klidu.

Dále zavedeme následující úmluvu:

Pokud nebude řečeno jinak, budeme pod názvem statická rovnováha soustavy těles rozumět podmíněnou statickou rovnováhu.

Pro podmíněnou statickou rovnováhu soustavy těles platí:

Soustava těles je v podmíněné statické rovnováze tehdy a jen tehdy, je-li každé těleso soustavy ve statické rovnováze.

Ve staticce budeme téměř výhradně rozlišovat jen:

- a) Soustavy těles ve statické rovnováze t.j. podmíněné.
- b) Nerovnovážné soustavy těles - t.j. soustavy, u kterých není ve statické rovnováze alespoň jedno těleso nebo soustava jako celek, případně obojí.

Již u jednoho tělesa jsme ukázali, že uložení může být normální nebo výjimečné, podle posloupnosti omezování složek pohybu tělesa jako celku a deformačních parametrů stykovými vazbami. Totéž platí i pro soustavy těles, proto budeme rozlišovat:

Normální soustavy těles - stykové vazby nejprve omezují složky pohybu jako celku a pak deformační parametry.

Výjimkové soustavy těles - u výjimkových soustav dochází k omezování deformačních parametrů dříve, než byly omezeny složky pohybu jako celku.

Soustavy těles lze rozlišovat podle celé řady dalších hledisek, která budou vymežována v dalších předmětech.

8.2 Pojmy vztahující se k soustavám těles.

V tomto odstavci uvedeme v přehledu pojmy, které budeme používat ve statickém řešení soustav těles.

Člen soustavy - těleso nebo více těles vzájemně nepohyblivě spojených, které mají charakter tělesa.

Binární člen - těleso vázané k okolním tělesům dvěma vazbami. Viz obr. 8.3a

Ternární člen - těleso vázaná k okolním tělesům třemi vazbami. Viz obr. 8.3b

Vícenásobný člen - těleso, které je k okolním tělesům vázáno větším počtem vazeb než třemi. Viz obr. 8.3c

Degenerovaný člen - spojovací těleso u vícenásobné rotační nebo sférické vazby

Hnací člen - člen mechanismu, jehož pohyb je řídicí

Hnaný člen - člen mechanismu, jehož pohyb je řízený

Základní prvek soustavy - těleso

Prvek soustavy - těleso nebo libovolná podsoustava, která má charakter tělesa.

Vnitřní vazba - vazba mezi tělesy, z nichž žádné není základním tělesem. Obr. 8.3e

Vnější vazba - vazba mezi tělesy, přičemž jedno těleso je základním tělesem. Obr. 8.3e

Vícenásobná vazba - Realizace rotační resp. sférické vazby vyžaduje, aby v místech styku tělesa tvořila válcovou resp. kulovou plochu, přičemž z kinematického a silového hlediska je podstatný střed této plochy. Viz obr. 86. To umožňuje styk více než dvou těles jednou vazbou, zdvojení, ztrojení ... znásobení rotační resp. sférické vazby. Vícenásobná vazba může být realizována podle obr. 86a, ale také pomocí zvláštního válcového resp. kulového tělesa, jehož funkcí je realizace spojení těles. Takové těleso nazýváme styčnickovým tělesem nebo degenerovaný člen. Pozor při určování pohyblivosti a uvolňování degenerovaný člen způsobuje studentům velké potíže. Viz obr. 8.3b.

Počet stupňů volnosti soustavy těles - počet všech nezávislých složek pohybů tělesa jako celku, které mohou vykonávat jednotlivá tělesa soustavy. Je mírou pohyblivosti soustavy těles.

Zatížený člen - těleso, které je v silové interakci s okolím soustavy. Viz obr. 8.3d

Nezatížený člen - těleso, které není v silové interakci s okolím soustavy.

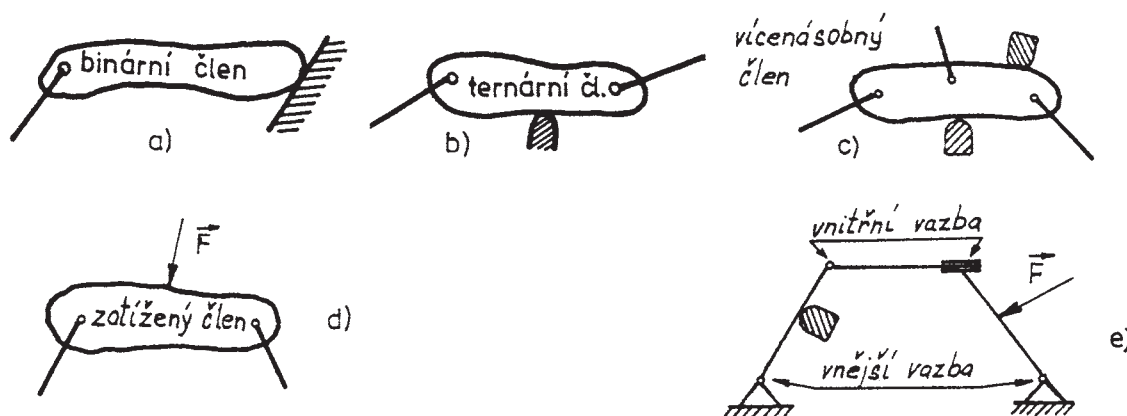
Staticky nefunkční člen - těleso, jehož odstraněním se nezmění ani pohyblivost vyjádřená počtem stupňů volnosti, ani stykové výslednice mezi tělesy.

Uložení soustavy těles - soustava vazeb stykem, kterými je soustava těles vázaná k základnímu tělesu.

Statically určitá soustava těles - soustava těles, u které neznámé parametry stykových výslednic mezi tělesy můžeme určit z podmínek statické rovnováhy.

Statically neurčitá soustava těles - soustava těles, u které neznámé nezávislé parametry stykových výslednic nemůžeme určit jen z podmínek statické rovnováhy.

Výjimková soustava těles - pohyblivá soustava těles s omezenými deformačními parametry.



Obr. 8.3:

8.3 Statické řešení soustav těles vázaných stykovými vazbami typu NNTN.

Obdobně jako u jednoho vázaného tělesa můžeme úlohy o soustavách těles rozdělit na analýzu a syntézu, přičemž základní z hlediska tvorby technických děl je úloha na syntézu, která v počáteční fázi obsahuje tvůrčí práci. Řešení zpravidla víceznačné úlohy na syntézu vyžaduje dokonalé zvládnutí úlohy na analýzu. V první fázi se zaměříme na řešení podmíněné statické rovnováhy úplně zadané soustavy těles.

Řešení podmíněné statické rovnováhy soustav těles je principiálně stejné s řešením statické rovnováhy jednoho vázaného tělesa a obsahuje tyto základní kroky:

- 1) Určení pohyblivosti soustavy těles
- 2) Uvolnění těles soustavy
- 3) Kontrolu nutné podmínky statické určitosti
- 4) Sestavení podmínek statické rovnováhy a jejich řešení
- 5) Rozbor výsledků řešení

Dříve než uvedeme algoritmus řešení podmíněné statické rovnováhy soustav těles, budeme se zabývat odlišnostmi jednotlivých kroků oproti řešení jednoho vázaného tělesa.

ad 1) **Určení pohyblivosti** složitých nebo výjimkových soustav těles vyžaduje samostatné kinematické řešení, proto ve staticce nelze analyzovat výjimkové soustavy. Výjimkovost

soustavy těles lze pouze konstatovat na základě rozboru statických rovnic. Pohyblivost normální soustavy bez degenerovaných těles určíme ze vztahu

$$i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi - \eta \right) \quad (8.3)$$

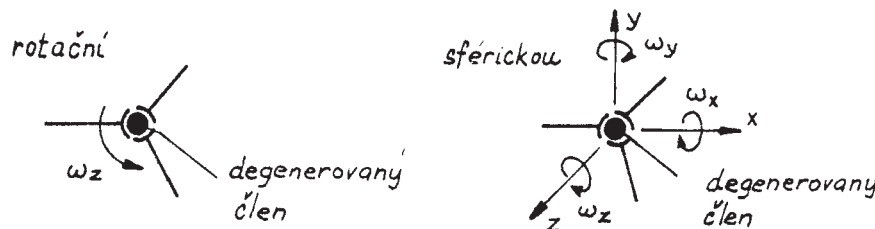
kde: i – počet stupňů volnosti soustavy
 η – počet omezených deformačních parametrů
 i_v – počet stupňů volnosti volného tělesa
 $\sum \xi_i$ – počet stupňů volnosti odebraných vazbami
 $(n - 1)$ – počet těles bez základního tělesa

Pokud soustava obsahuje degenerované členy pak pohyblivost určíme ze vztahu

$$i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi - \eta \right) - k\delta \quad (8.4)$$

kde k – počet degenerovaných členů
 $\delta = 1$ pro degen. člen s vícenásobnou rotační vazbou
 $\delta = 3$ pro degen. člen s vícenásobnou sférickou vazbou

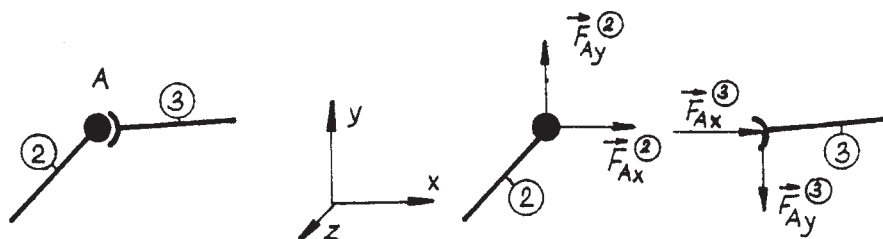
Válcové resp. kulové degenerované těleso má vždy 1 resp. 3 volnosti, které neovlivní



Obr. 8.4:

pohyblivost soustavy, proto je musíme při určování stupňů volnosti soustavy odečíst.

ad 2) **Uvolnění těles soustavy.** Jestliže uvolňujeme vázané těleso od základního tělesa neurčíme silové výslednice působící na základní těleso. Uvolňujeme-li dvě tělesa soustavy musíme určit výsledné silové působení na obě tělesa, přičemž můžeme postupovat dvěma způsoby.

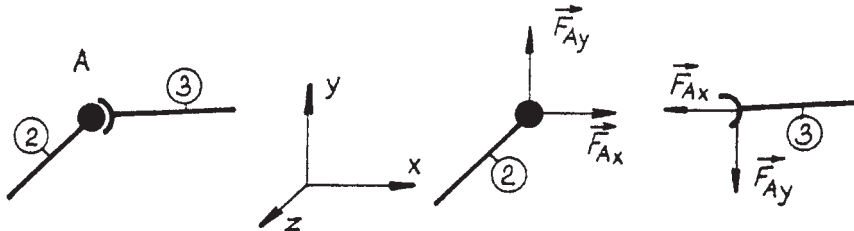


Obr. 8.5:

1. Oddělíme tělesa, silové působení vyjádříme neúplně určenými výslednými stykovými silami, přičemž smysl sil na obou tělesech libovolně volíme. Viz obr. 8.5. Princip akce a reakce zajistíme doplněním podmínek statické rovnováhy vztahy:

$$F_{Ax}^2 = -F_{Ax}^3 \text{ a } F_{Ay}^2 = -F_{Ay}^3.$$

2. Uvolňování s uvažováním principu akce a reakce, viz obr. 8.6.



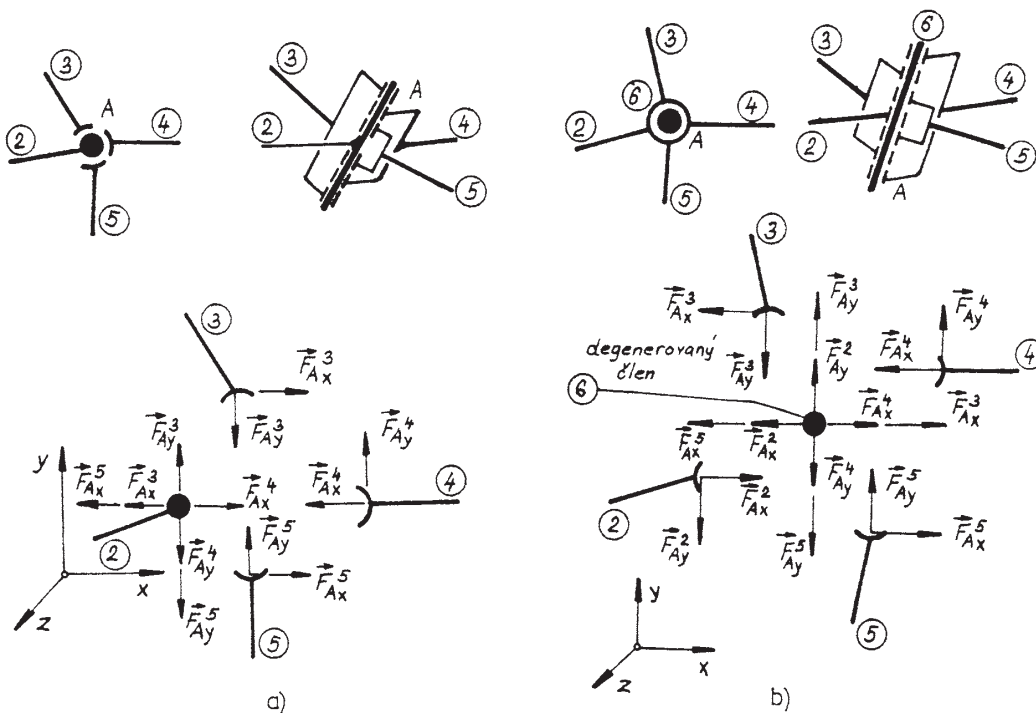
Obr. 8.6:

Oddělíme tělesa, smysl výsledných stykových sil na prvním tělese zvolíme, na druhé těleso v důsledku principu akce a reakce působí síly s opačným smyslem.

Uvolňování vícenásobné rotační vazby. Uvolnění provedeme pro trojnásobnou rotační vazbu. Vícenásobná rotační vazba může být realizována dvojím způsobem, viz obr. 8.7.

Vazba odnímá 6 stupňů volnosti
a není realizovaná degenerovaným
tělesem

Vazba odnímá 8 stupňů volnosti
a je realizovaná degenerovaným
tělesem, proto $\delta = 1$



Obr. 8.7:

Algoritmus řešení podmíněné statické rovnováhy soustav těles popíšeme na konkrétní úloze.

Zadání:

Soustava těles podle obrázku má být nepohyblivá staticky určitá. Zkontrolujte podmínky zadání a v případě, že jsou splněny, určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly. Viz obr. 8.8

Zamyšlení:

V případě, že soustava je nepohyblivá, je v podmíněné statické rovnováze. Úloha je zadaná abstraktně veličinami.

Rozbor zadání:

- a) Z hlediska úplnosti a správnosti.

Soustava je zadaná obecně. Geometrie soustavy, vazby a silové prvky \vec{F} , \vec{M} jsou zadány úplně a správně.

- b) Z hlediska prostorového uspořádání soustavy.

Úloha je zadaná jako rovinná.

- c) Volba označení - viz obr. 8.8

- d) Klasifikace členů

2 - binární zatížený člen

3 - binární zatížený člen

Soustava neobsahuje degenerovaný člen

- e) Klasifikace vazeb

A, C - rotační k.d (r.k.d) - $\xi_i = 2$

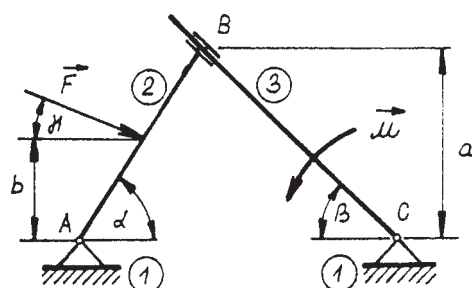
B - posuvná k.d (p.k.d) - $\xi_i = 2$ Žadná vazba není podmíněně funkční

- f) Určení pohyblivosti soustavy

Počet členů soustavy $n = 3$, předpokládaný počet omezených deformačních parametrů $\eta = 0$.

$$i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right) = (3 - 1)3 - (6 - 0) = 0 \quad (8.5)$$

$$i = 0, \eta = 0$$



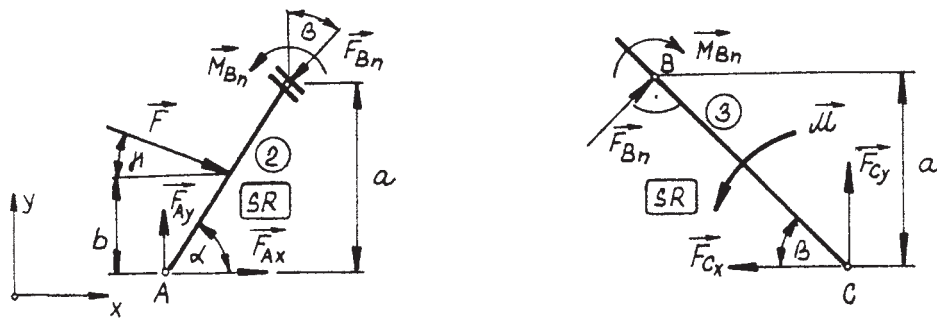
Obr. 8.8:

Soustava je uložena nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů \implies Soustava je pohybově v podmíněné statické rovnováze. Tento výrok byl vysloven na základě kinematického rozboru. Jestliže se v průběhu řešení ukáže nepravdivým, je to způsobeno tím, že do rozboru jsme nezahrnuli všechny podstatné parametry.

Body d), e), f) tvoří kinematický rozbor.

Řešení:

- b) Uvolnění jednotlivých členů soustavy. Členy uvolňujeme s respektováním principu akce a reakce.



Obr. 8.9:

c) Statický rozbor

I. Určení soustavy úplně zadaných a neúplně určených silových prvků a množiny neznámých nezávislých parametrů .

$$\begin{aligned}\pi &= \{\vec{F}, \vec{M}\} & \pi_R &= \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{M}_B, \vec{F}_C\} \\ NP &= \{F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bn}, M_{Bn}, F_{Cx}, F_{Cy}\} \\ \mu_F &= 5, & \mu_M &= 1, & \mu &= 6\end{aligned}$$

II. Určení počtu použitelných podmínek statické rovnováhy

$$\begin{aligned}\pi_{\nu_2}, \pi_{\nu_3} &- \text{rovinné obecné soustavy} \implies \\ \nu_i &= 3 & \nu &= \sum \nu_i = 6; & \nu_F &= 4; & \nu_M &= 2\end{aligned}$$

III. Ověření nutné podmínky statické určitosti

$$\left. \begin{aligned}\mu &= \nu & \mu_M + \mu_r &\leq \nu_M \\ 6 &= 6 & 2 + 0 &< 4\end{aligned} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{Nutná podmínka statické určitosti} \\ \text{je splněna, má smysl pokračovat} \\ \text{ve statickém řešení} \end{array}$$

d) Sestavení podmínek statické rovnováhy:

Těleso 2

$$\begin{aligned}F_x &: F_{Ax} - F_{Bn} \sin \beta + F \cos \gamma = 0 \\ F_y &: F_{Ay} - F_{Bn} \cos \gamma = 0 \\ M_{zA} &: -F \cos \gamma b - F \sin \gamma b \coth \alpha - M_{Bn} + F_{Bn} \sin \beta a - F_{Bn} \cos \beta a \coth \alpha = 0\end{aligned}$$

Těleso 3

$$\begin{aligned}F_x &: F_{Cx} + F_{Bn} \cos \beta = 0 \\ F_y &: F_{Cy} + F_{Bn} \sin \beta = 0 \\ M_{zB} &: \mathcal{M} + M_{Bn} + F_{Cx} a + F_{Cy} a \coth \beta = 0\end{aligned}$$

Maticový zápis soustavy rovnic

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & a \coth \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Bn} \\ M_{Bn} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \cos \gamma \\ F \sin \gamma \\ F(b \cos \gamma + b \sin \gamma \coth \alpha) \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix}$$

$$\text{kde } k = (a \sin \beta - a \cos \beta \coth \alpha)$$

e) Řešení soustavy statických rovnic

f) Rozbor řešení:

Je-li soustava zadána číselnými veličinami, pak je nutné provést rozbor výsledků řešení.

Z hlediska statiky je úloha ukončena, je-li nalezeno řešení neznámých nezávislých parametrů, což lze provést v případech, kdy úloha je staticky určitá. Ostatní případy vyžadují širší znalosti (kinematiky, dynamiky, numerické matematiky, pružnosti pevnosti a informatiky) a je možné je analyzovat až ve vyšších ročnících studia.

Poznámka:

- 1) Určujeme-li pohyblivost soustavy pomocí vztahu $i = (n - 1)i_v - (\sum \xi_i - \eta)$, je nutné si uvědomit, že tento vztah určuje pohyblivost soustavy globálně. Jestliže soustava se skládá z pohyblivé podsoustavy s jedním stupněm volnosti a podsoustavy s jedním omezeným deformačním parametrem, pak výsledná pohyblivost soustavy určená uvedeným vztahem je $i = 0, \eta = 0$. Chybu poznáme rozбором soustavy statických rovnic.
- 2) U soustavy těles je silové působení přiřazeno tělesu a nelze je přiřadit jinému tělesu. Působí-li síla \vec{F} na těleso 2, nemůžeme ji posunout na těleso 3.

U zkoušky ze statiky je u výpočtového řešení soustavy těles postačující sestavení statických rovnic, jejich hodnocení z hlediska lineárnosti a úvahy o možných problémech počítačového řešení v návaznosti na znalosti matematiky a programování.

Konkrétní řešení statické rovnováhy soustav těles je v [2] **úlohy ST[1] - ST[10]** a v kapitole 9 z hlediska porovnání výpočtového a grafického řešení soustav těles.

8.4 Zvláštní případy soustav těles

V tomto odstavci stručně uvedeme několik speciálních případů soustav těles ze statického hlediska. Jsou dány zvláštností soustavy statických rovnic, zvláštními požadavky na řešení nebo zvláštností samotné soustavy těles.

1. Soustavy částečně staticky určité.

Staticky neurčitou soustavu těles lze rozdělit na podsoustavu staticky neurčitou a podsoustavu staticky určitou, což se projeví tím, že soustavu statických rovnic můžeme rozdělit na dvě soustavy, přičemž jedna je řešitelná. Z množiny neznámých nezávislých parametrů můžeme určit alespoň některé prvky.

2. **Soustavu statických rovnic lze rozdělit na dílčí, samostatně řešitelné podsoustavy.** Rozdělení může být výhodné při řešení úloh na malé výpočetní technice, není výhodné při řešení na počítačích.
3. **Vlastní rovnice statické rovnováhy u mechanismů.**

Jestliže u mechanismů ve statické rovnováze nás nezajímají stykové síly, ale jen vztahy mezi silovými prvky působícími na hnané a hnací těleso, je možné úpravami statických rovnic obdržet závislost mezi uvedenými veličinami. Tyto úpravy je možné v rozumném analytickém tvaru provádět pouze pro jednoduché soustavy těles.

8.5 Prutové soustavy

Prutové soustavy, kterými se budeme ve staticce zabývat, jsou nejjednodušší modelovou soustavou prutových a příhradových konstrukcí. Tuto nejjednodušší modelovou soustavu vymezíme souborem následujících předpokladů:

- 1) Vazby mezi tělesy jsou u prostorových úloh sférické kinematické dvojice a u roviných úloh rotační kinematické dvojice, v obou případech typu NNTN. Viz obr. 8.10.
- 2) Jednotlivá tělesa jsou buď pruty nebo styčnicková tělesa.
Prutem ze statického hlediska rozumíme modelové těleso, které je jednoznačně určeno střednicí γ , která je spojnicí těžišť příčných průřezů. V prutových soustavách se omezíme na pruty přímé, t.j. takové, jejichž střednicí je přímka. V dalších předmětech mechaniky těles prutové předpoklady rozšíříme z hlediska dalších mechanických vlastností.
Styčnickové těleso spojuje dva a více prutů, přičemž středy sférických kinematických dvojic u prostorových úloh a středy rotačních kinematických dvojic u rovinných úloh splývají. Tento společný bod nazveme styčnickem. Viz obr. 8.10.
- 3) Okolí prutové soustavy působí silami pouze na styčnicková tělesa.
- 4) Uložení k základnímu tělesu je realizováno stykem ve styčnicku. U rovinných soustav rotační nebo obecnou kinematickou dvojicí a u prostorových soustav sférickou nebo obecnou kinematickou dvojicí.
- 5) Každý prut prutové soustavy je vázán prostřednictvím styčnickových těles minimálně ke dvěma jiným prutům tak, že pruty jsou nepohyblivé. Soustava prutů vytváří nepohyblivé prutové těleso.

Poznámka:

U prutových soustav zvolíme toto označení:

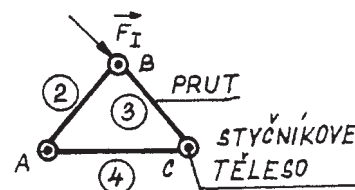
Základní těleso 1

Pruty 2 3 ...

Styčnicková tělesa (styčnický) budeme označovat A, B, C ... A,

B, C - současně označují vazbu realizovanou styčnickem

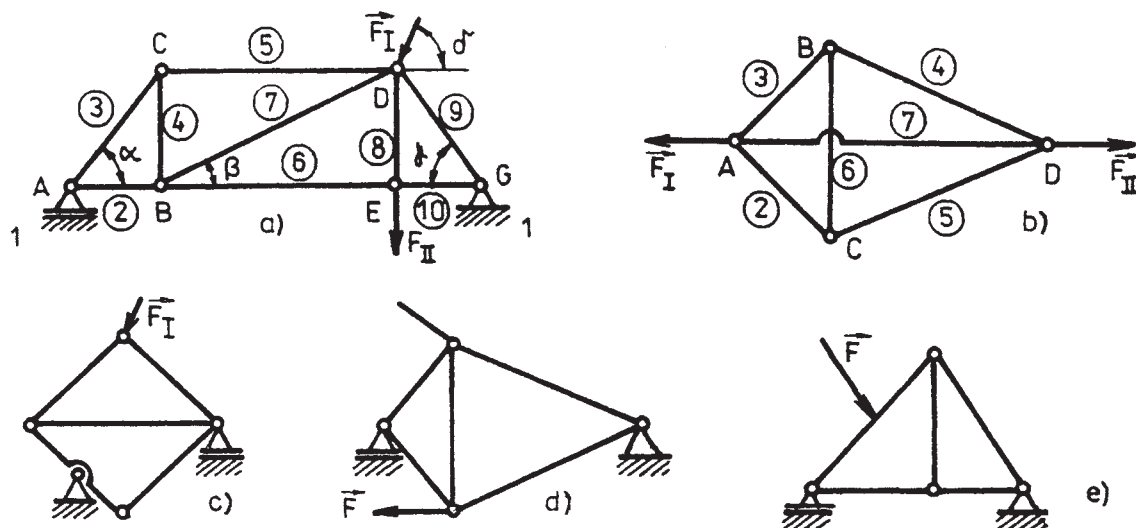
Úplně zadané silové prvky F_I, F_{II}, \dots



Obr. 8.10:

Vnější stykové síly $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \dots$. Vnější stykové síly se vztahují ke kinematickým dvojicím, kterými je prutové těleso vázáno k základnímu tělesu.

Soustavy těles podle obr. 8.11 c, d, e nejsou prutové soustavy, protože u nich nejsou splněny prutové předpoklady.



Obr. 8.11:

Vzhledem k tomu, že prut je ze statického hlediska reprezentován střednicí a styčnickové těleso styčnickem, znázorňujeme prut úsečkou a styčnickové těleso bodem.

Styčnický rozlišujeme - vnější

- vnitřní - zatížené

- nezatížené

Vnějším styčnickem je prutová soustava vázaná k základnímu tělesu. Viz obr. 8.11a styčnický A, G.

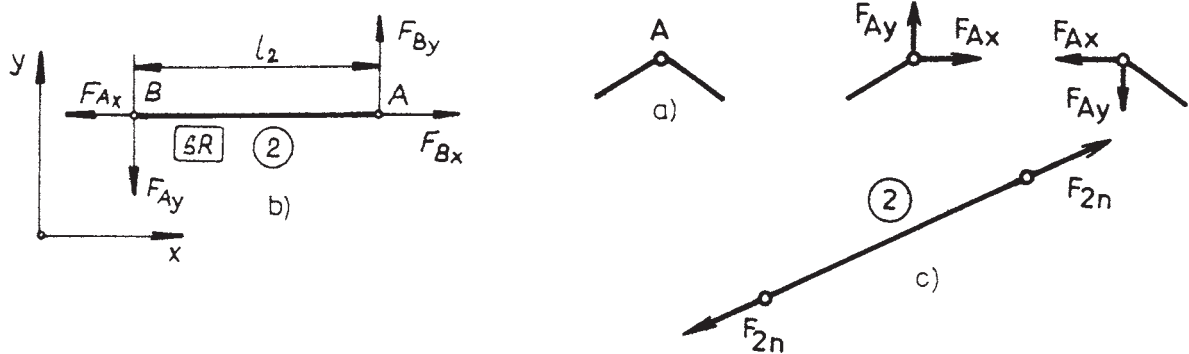
Vnitřní nezatížený styčnick váže pruty prutové soustavy. Viz obr. 8.11b styčnický B, C.

Vnitřní zatížený styčnick váže pruty prutové soustavy a působí v něm úplně určená síla. Viz obr. 8.11a styčnický D, E.

Statickou rovnováhu prutové soustavy budeme rozumět **podmíněnou statickou rovnováhu**, t.z. prutová soustava je ve statické rovnováze, je-li každé těleso a každá podsoustava ve statické rovnováze.

Při uvolňování prutů budeme respektovat axiom o vzájemném působení stejným způsobem jako u soustav těles, t.j. uvolníme-li kinematickou dvojici, pak orientaci stykové síly působící na jedno těleso zvolíme a orientace stykové síly působící na druhé těleso je na základě principu akce a reakce opačná.

Z uvolnění těles prutové soustavy, která je ve statické rovnováze a prutových předpokladů vyplývají tyto důsledky:



Obr. 8.12:

- z uvolnění prutu a podmínek statické rovnováhy vyplývá:

Podmínka SR prutu 2

$$\left. \begin{array}{l} F_x : -F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \\ F_y : -F_{Ay} + F_{By} = 0 \\ M_{zA} \quad F_{By} \cdot l_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_{Ax} = F_{Bx} = F_2 \\ F_{By} = F_{Ay} = 0 \end{array}$$

- **Prut přenáší pouze sílu v ose prutu**, která představuje jeden neznámý silový parametr. Viz obr. 8.12c. F_{2n} - souřadnice síly ve směru osy prutu. Obě stykové síly směřují buď do prutu nebo z prutu. Síly přenášené pruty nazveme prutovými silami.
- Zavedeme orientaci prutové síly vůči prutu takto: Prutovou sílu budeme označovat za kladnou, je-li orientována z prutového tělesa.
- Vzhledem k tomu, že uvolnění prutu je jednoduché, nebudeme uvolnění prutů graficky zobrazovat, ale budeme je provádět pouze v představě.
- Z uvolnění styčnickového tělesa (které je ze statického hlediska reprezentováno styčником) a podmínek statické rovnováhy vyplývá:
- Soustava sil působících na styčník je prostorovou resp. rovinnou soustavou sil se společným působištěm.
- U vnitřních styčníků známe z uvolnění prutů nositelky prutových sil působících na styčník a všechny parametry úplně zadaného zatížení. Při určování smyslu prutových sil respektujeme axiom o vzájemném působení.
- U vnějších styčníků známe nositelky prutových sil a působiště (u sférické a rotační kinematické dvojice) resp. nositelku (u obecných kinematických dvojic) vnějších stykových sil.

Z prutového předpokladu 5 vyplývá: Po uvolnění prutové soustavy od základního tělesa obdržíme uvolněnou prutovou soustavu, kterou nazveme prutové těleso. Prvky prutového tělesa se vůči sobě nepohybují, prutová soustava tvoří nepohyblivé prutové těleso.

U prutových soustav rozlišujeme **vnější, vnitřní a celkovou statickou určitost**.

Vnější statická určitost prutových soustav se vztahuje k určení vnějších neznámých stykových sil uvolněného prutového tělesa z použitelných podmínek statické rovnováhy.

Nutnou podmínku vnější statické určitosti můžeme vyjádřit vztahem

$$\nu = \mu_A$$

kde μ_A - je počet neznámých parametrů vnějších stykových sil

ν - je počet použitelných statických podmínek rovnováhy, který určíme z charakteru soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$ - sil působících na uvolněné prutové těleso, přičemž π - je soustava úplně zadaných silových prvků a π_R - je soustavou neúplně určených vnějších stykových sil.

Vnitřní statická určitost se vztahuje k určení sil v prutech. Uvolníme-li všechna tělesa prutové soustavy, přičemž pruty uvolníme podle obr. 91c, pak podmínky statické rovnováhy pro pruty jsou identicky splněné a použitelné statické podmínky určujeme z charakteru soustav sil působících na styčnicková tělesa. U prostorové resp. rovinné prutové soustavy působí na uvolněné styčnickové těleso prostorová resp. rovinná soustava sil se společným působištem. Jestliže napíšeme pro všechna styčnicková tělesa použitelné podmínky statické rovnováhy, pak z těchto podmínek vhodnými algebraickými úpravami obdržíme podmínky statické rovnováhy prutového tělesa, t.z. že podmínky statické rovnováhy prutového tělesa jsou lineárně závislé se soustavou podmínek statické rovnováhy styčnicků. Proto počet všech použitelných podmínek statické rovnováhy pro prostorovou resp. rovinnou prutovou soustavu je $3k$ resp. $2k$ a podmínka vnitřní statické určitosti má tvar:

$$3k - 6 = p \quad \text{- pro prostorovou prutovou soustavu}$$

$$2k - 3 = p \quad \text{- pro rovinnou prutovou soustavu}$$

kde k - je počet styčnicků

p - počet prutů

$3k$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro prostorovou prutovou soustavu.

$2k$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro rovinnou prutovou soustavu.

$3k - 6$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro určení sil v prutech u prostorové prutové soustavy.

$2k - 3$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro určení sil v prutech u rovinné prutové soustavy.

Je-li $3k - 6 < p$ resp. $2k - 3 < p$, pak prutová soustava obsahuje více prutů a tím i více neznámých prutových sil, než jsme schopni ze statických podmínek určit. Stupeň vnitřní statické neurčitosti pak určíme ze vztahu:

$$s = p - (3k - 6) \text{ resp. } s = p - (2k - 3)$$

Tvoří-li pruty prutové soustavy trojúhelníkové obrazce, pak je prutová soustava vždy vnitřně staticky určitá.

Celková statická určitost prutových soustav se vztahuje k určení všech neznámých nezávislých parametrů prutové soustavy z použitelných podmínek statické rovnováhy. Obecně vyjádřená nutná podmínka celkové statické určitosti má tvar $\nu = \mu$. Z rozboru vnitřní a vnější statické určitosti je zřejmé, že celkovou podmínku statické určitosti můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$3k = p + \mu_A \quad - \text{ pro prostorovou prutovou soustavu}$$

$$2k = p + \mu_A \quad - \text{ pro rovinou prutovou soustavu}$$

Postup řešení statické rovnováhy prutových soustav. Prutové soustavy z hlediska tvorby technických děl mají historicky velký význam. Teorie prutových soustav je podrobně propracovaná a studenti v literatuře mohou nalézt řadu specifických metod pro konkrétní prutové soustavy. Např. v [3] str. 145 - 155. My se dále omezíme pouze na dvě základní metody.

a) **Obecná styčnicková metoda** spočívá v uvolnění všech styčníků a sestavení použitelných podmínek statické rovnováhy, které vytvářejí soustavu lineárních algebraických rovnic, kterou můžeme zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (8.6)$$

- kde \mathbf{A} — je matice soustavy, která popisuje prutovou soustavu geometricky
 \mathbf{x} — sloupcová matice neznámých parametrů
 \mathbf{b} — sloupcová matice úplně zadaných silových prvků.

V praxi soustavu algebraických lineárních rovnic (9.3) řešíme na počítači. Software na řešení soustavy algebraických lineárních rovnic dnes patří k vybavení programovatelných kalkulaček. Proto dnes v praxi převládá obecná styčnicková metoda. Po vyřešení neznámých parametrů musíme provést rozbor výsledků řešení.

b) **Postupná styčnicková metoda** spočívá v postupném uvolňování staticky určitě vázaných styčníků v dané fázi řešení. Pořadí styčníků pak není libovolné, ale je dáno podmínkou, že na uvolněný styčnick působí kromě úplně určených silových prvků neúplně určené silové prvky pouze se 3 neznámými parametry u prostorové resp. se 2 neznámými parametry u rovinné prutové soustavy. Není-li v dané fázi řešení u prutové soustavy staticky určitě vázaný styčnick, pak v řešení můžeme pokračovat, podaří-li se nám určit některý z neznámých parametrů na základě uvolnění podsoustavy. To se nám vždy podařit nemusí a pak je nejjednodušší použít obecnou styčnickovou metodu.

9 Grafické řešení statických úloh

9.1 Základní věty grafického řešení

Kromě výpočtového řešení lze některé jednodušší úlohy o statické rovnováze a ekvivalenci řešit efektivně graficky. V tomto odstavci uvedeme základní grafické metody. Algoritmus výpočtového řešení statických úloh byl uveden v kapitole 7 o řešení statické rovnováhy vázaného tělesa. Postupy při výpočtové a grafické metodě řešení se odlišují v krocích d - f. Pro grafické řešení mají uvedené kroky tento obsah:

- d) Grafické zobrazení zadaných číselných veličin. Silové a geometrické veličiny jsou zadány číselně. Tyto veličiny musíme jednoznačně zobrazit grafickými veličinami. Zobrazení je charakteristické měřítkem, jehož rozměr je odvozen z rozměru zobrazované veličiny. Měřítko budeme zapisovat ve tvaru:

$$\begin{aligned} 1\text{mm} &\cong 5\text{N} && \text{čteme} && 1\text{mm} \text{ odpovídá } 5\text{N} \\ 1\text{mm} &\cong 0.1\text{m} && \text{čteme} && 1\text{mm} \text{ odpovídá } 0.1\text{m} \end{aligned}$$

Grafická konstrukce, u které nejsou uvedena měřítko, neposkytuje kvantitativní údaje o řešeném problému.

- e) Nakreslení geometrického obrazce zadaných veličin v daném zobrazení.
- f) Realizace grafické konstrukce. Grafická konstrukce se nejčastěji skládá z posloupnosti těchto operací: sestrojení průsečíku dvou různoběžek, sestrojení přímky procházející dvěma body, sestrojení rovnoběžky s danou přímkou, sestrojení přímky procházející daným bodem rovnoběžně s danou přímkou, konstrukce trojúhelníka, sestrojení bodu ležícího na dané přímce v dané vzdálenosti od určeného bodu.
- g) Zpětné zobrazení grafických veličin na veličiny číselné.

Sestrojení grafické konstrukce vyžaduje technické prostředky, které dnes můžeme rozdělit do dvou skupin:

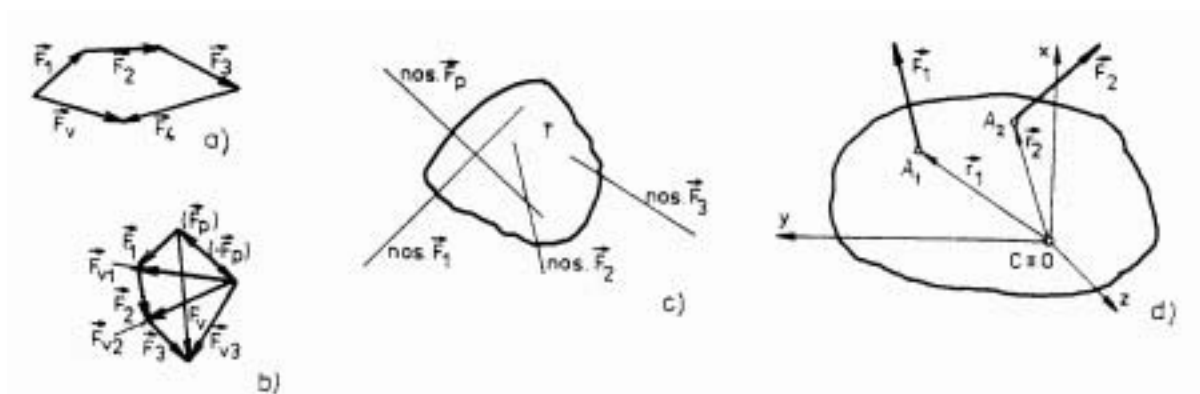
- a) elementární - papír, tužka, pravítko, kružítko.
- b) počítačové - počítač vybavený grafickým softwarem a patřičnými grafickými periferiemi.

V současné době je dominantní výpočtové řešení, proto se grafickým řešením budeme zabývat především z pedagogického hlediska se zaměřením na získání názorné představy, kterou grafické řešení poskytuje lépe než výpočtové. Graficky budeme řešit úlohy jednoduché, nevyžadující speciální grafické konstrukce, s omezením na rovinné úlohy. Vzhledem k tomu, že technické prostředky počítačové interaktivní grafiky v současné době jsou ve výuce nedostupné, omezíme se na úlohy řešené tužkou, pravítkem a kružítkem na papíře. Grafické konstrukce, kterými se budeme zabývat, jsou založeny na jednoduchých geometrických konstrukcích a větách o dvou a o třech silách a větě o superpozici.

Při grafických konstrukcích budeme používat následující pojmy:

- silový obrazec - silový n-úhelník jako zobecnění silového trojúhelníka viz. obr. 9.1a

- silový obrazec s pomocnými silami viz. obr. 9.1b
- nositelkový obrazec viz. obr. 9.1c



Obr. 9.1:

9.1.1 Věta o superpozici

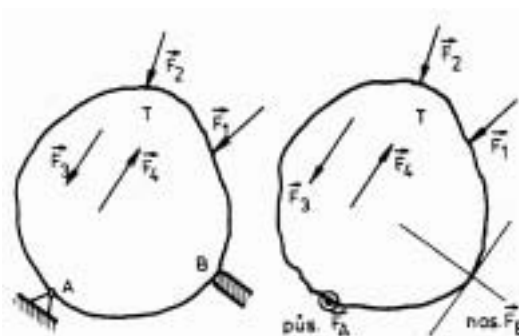
Nechť na vázané těleso působí úplně zadaná silová soustava $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ a uložení tělesa je takové, že po uvolnění stykových vazeb, kdy na uvolněné těleso působí úplně zadaná soustava π a soustava neúplně určených stykových sil π_R , je splněna nutná podmínka statické určitosti a soustava statických rovnic je lineární. Pak soustavu statických rovnic můžeme zapsat v maticovém tvaru rovnic:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

kde \mathbf{x} – je sloupcová matice neznámých parametrů (NP)

\mathbf{A} – je matice soustavy rovnic, která z geometrického hlediska charakterizuje uložení tělesa

\mathbf{b} – je sloupcová matice obsahující součty souřadnic úplně zadané soustavy π , tedy $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n$, kde \mathbf{b}_i je sloupcový vektor souřadnic i -té úplně zadané síly \vec{F}_i .



Obr. 9.2:

Na základě znalostí z lineární algebry můžeme formulovat větu o superpozici:

Pokud je matice \mathbf{A} regulární pak existuje řešení soustavy rovnic a platí:

$\mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_i = \sum \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_i = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n)$, kde $\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_i$ je vektor stykových sil způsobený i -tým úplně zadaným silovým prvkem.

Protože věta o superpozici se využívá především při grafickém řešení, uvedeme její slovní formulaci pro grafické řešení:

Působí-li na uvolněné těleso soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ a soustava neúplně určených stykových sil $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$, přičemž soustava statických rovnic je lineární (neproměnný styk), pak stykové síly soustavy π_R určíme jako výslednice dílčích stykových sil. Např. $\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{A_i}$, kde \vec{F}_{A_i} je dílčí styková síla ve vazbě A vyvolaná i-tou silou \vec{F}_i úplně zadané soustavy sil π .

9.1.2 Věta o dvou silách

Formulace věty pro statickou ekvivalenci samostatného působení dvou sil na těleso:

Samostatné působení síly \vec{F}_2 na těleso je staticky ekvivalentní se samostatným působením síly \vec{F}_1 jestliže:

- síly působí na stejné nositelce
- síly jsou stejně velké a stejně orientované ($\vec{F}_2 = \vec{F}_1$)

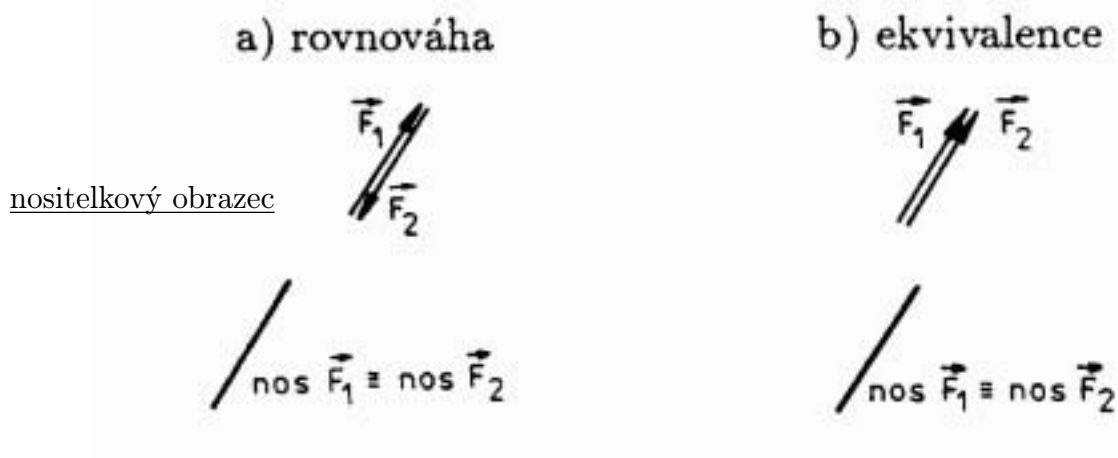
Formulace věty pro statickou rovnováhu tělesa při současném působení dvou sil:

Těleso je při současném působení dvou sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 ve statické rovnováze jestliže:

- síly působí na stejné nositelce
- síly jsou stejně velké, ale opačně orientované ($\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$)

Grafická interpretace věty o dvou silách je vyjádřena silovým a nositelkovým obrazcem (obr. 9.3).

silový obrazec



Obr. 9.3:

9.1.3 Věta o třech silách

Také věta o třech silách má dvě varianty. První varianta se týká nahrazení dvou sil z hlediska statické ekvivalence jedinou silou a druhá varianta věty pojednává o rovnováze uvolněného tělesa na které působí jako jediné silové prvky tři síly.

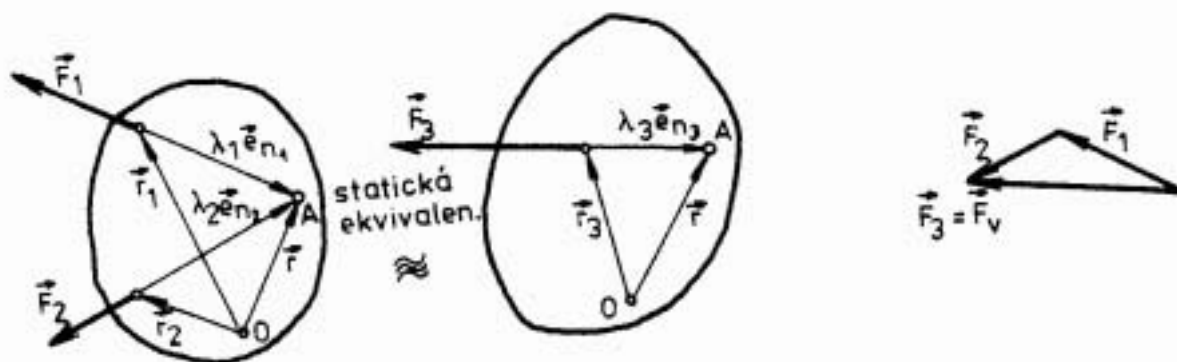
Formulace věty pro statickou ekvivalenci:

Působení dvou daných sil \vec{F}_1, \vec{F}_2 , určených $\{A_1, \vec{F}_1\}$ a $\{A_2, \vec{F}_2\}$ na těleso T je staticky ekvivalentní s působením síly \vec{F}_3 , je-li splněna podmínka statické ekvivalence, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 \quad \wedge \quad \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

nositelkový obrazec

silový obrazec



Obr. 9.4:

Grafická interpretace předchozího vztahu je zřejmá ze silového a nositelkového obrazce (obr. 9.4):

Samostatné působení síly \vec{F}_3 na těleso je staticky ekvivalentní se společným působením sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 jestliže:

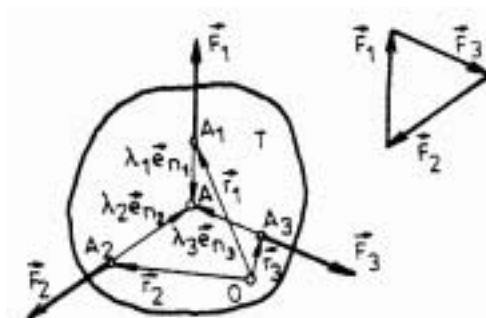
- nositelky všech tří sil leží v jedné rovině a protínají se v jednom bodě
- silový obrazec je uzavřený, přičemž síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 jsou v něm orientovány v jednom smyslu a síla \vec{F}_3 ve smyslu opačném

Formulace věty pro statickou rovnováhu tělesa:

Působí-li na uvolněné těleso tři síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 a \vec{F}_3 jako jediné silové prvky (obr. 9.5), pak těleso T bude ve statické rovnováze, budou-li síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 a \vec{F}_3 tvořit rovnovážnou soustavu, což vyjádříme statickou podmínkou ve tvaru

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \quad \wedge \quad \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Grafická interpretace předchozího vztahu je zřejmá ze silového a nositelkového obrazce (obr. 9.5):



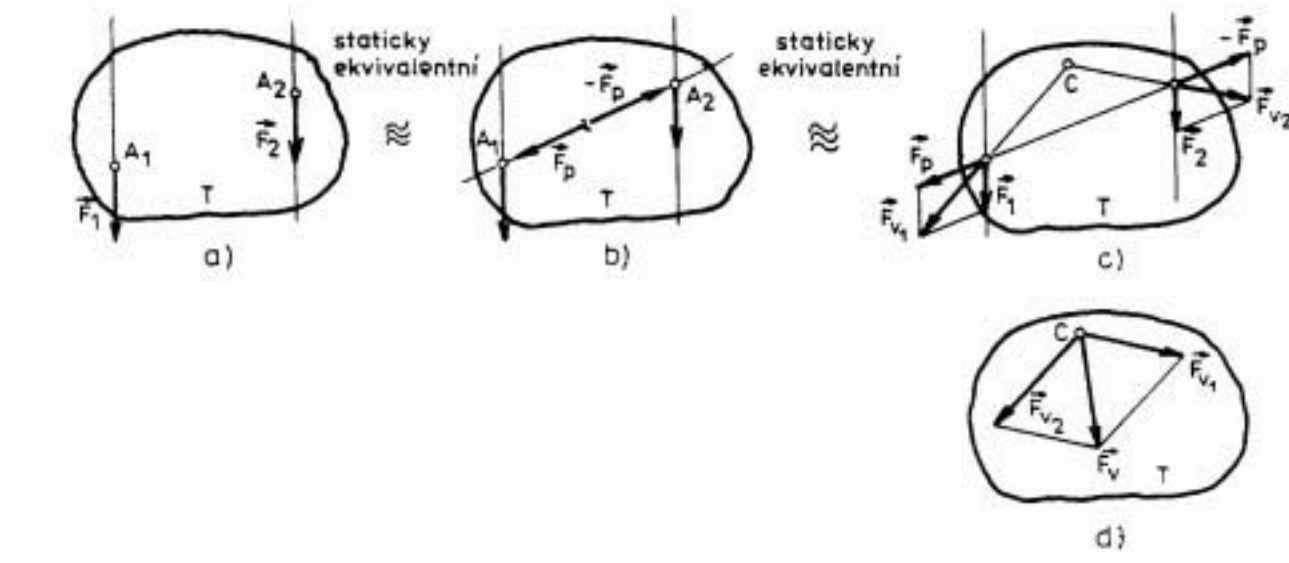
Obr. 9.5:

Těleso je při současném působení tří sil \vec{F}_1 , \vec{F}_2 a \vec{F}_3 ve statické rovnováze jestliže:

- nositelky všech tří sil leží v jedné rovině a protínají se v jednom bodě
- silový obrazec je uzavřený, přičemž síly \vec{F}_1 , \vec{F}_2 a \vec{F}_3 jsou v něm orientovány v jednom smyslu

9.2 Základní grafické konstrukce odvozené z vět o dvou a o třech silách a věty o superpozici

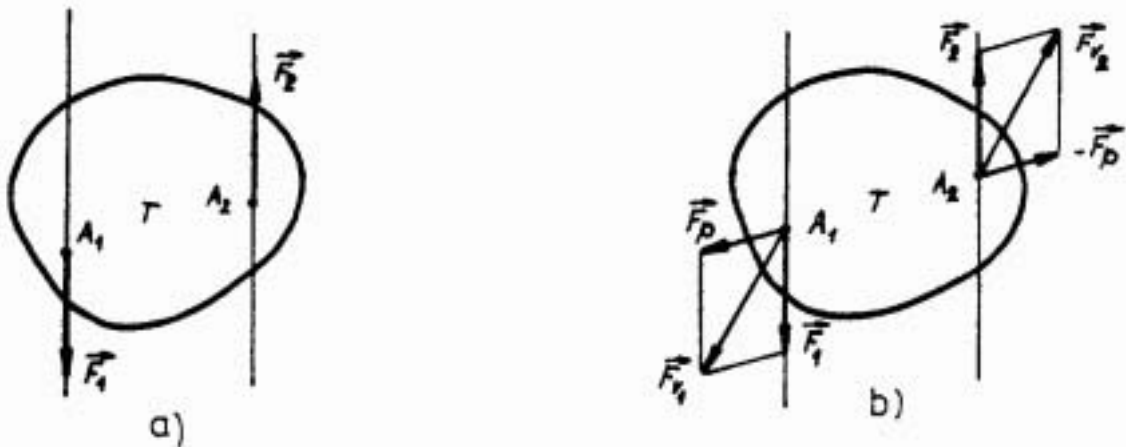
Na základě věty o třech silách můžeme z hlediska statické ekvivalence nahradit dvě síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 působící na těleso jedinou staticky ekvivalentní silou \vec{F}_3 , jejíž nositelka prochází průsečíkem nositelek \vec{F}_1 a \vec{F}_2 . Pokud síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 jsou rovnoběžné je průsečíkem jejich nositelek úběžný bod (obr. 9.6).



Obr. 9.6:

Polohu nositelky síly \vec{F}_3 v tomto případě určíme takto:

K soustavě sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 připojíme libovolnou rovnovážnou soustavu dvou sil \vec{F}_p a $-\vec{F}_p$ na společné nositelce, která protíná nositelky sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 . Na základě věty o třech silách nahradíme soustavu sil \vec{F}_1 a \vec{F}_p staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v1} a síly $-\vec{F}_p$ a \vec{F}_2 staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v2} . Další postup je zřejmý z obr. 9.6. Pokud nastane, že $\vec{F}_{v1} = -\vec{F}_{v2}$ a jejich nositelky jsou rovnoběžné, vytvářejí tyto síly silovou dvojici, která je staticky ekvivalentní silové dvojici \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , jednoznačně určené \vec{M} (viz. obr. 9.7).



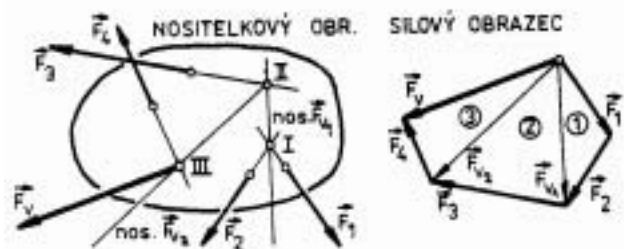
Obr. 9.7:

Pokud na těleso působí více sil a soustava je rovinná, můžeme na základě postupného nahrazování dvou sil staticky ekvivalentní silou původní silovou soustavu nahradit jedinou staticky ekvivalentní silou (při $\vec{F}_v \neq \vec{0}$) nebo jedinou staticky ekvivalentní dvojicí (při $\vec{F}_v = \vec{0}$). Při grafickém řešení určujeme velikost a orientaci staticky ekvivalentní síly v silovém obrazci a polohu nositelky staticky ekvivalentní síly v nositelkovém obrazci. Postup řešení si ukážeme na příkladě nahrazení soustavy čtyř různoběžných sil jedinou silou, viz obr. 9.8 (určení výslednice různoběžných sil).

Postup řešení:

Síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v1} , jejíž velikost, směr nositelky a orientaci určíme ze silového trojúhelníka ①. Nositelka podle věty o třech silách prochází průsečíkem nositelek sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 (bod I). Obdobně nahradíme \vec{F}_{v1} a \vec{F}_3 staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v2} , jejíž velikost, směr nositelky a orientaci určíme ze silového trojúhelníka ②

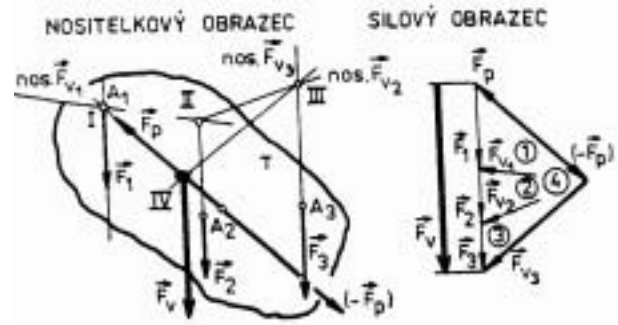
a nositelka musí procházet průsečíkem nositelek \vec{F}_3 a \vec{F}_{v1} (bod II). Síly \vec{F}_{v2} a \vec{F}_4 nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v , která je v důsledku postupného nahrazování staticky ekvivalentní se silami \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 a \vec{F}_4 . Velikost, orientaci a polohu nositelky \vec{F}_v určíme ze silového a nositelkového obrazce obdobně jako u \vec{F}_{v1} a \vec{F}_{v2} . Jestliže nositelky sil jsou rovnoběžné, musíme k dané soustavě sil připojit rovnovážnou soustavu. Postup řešení ukážeme na příkladě nahrazení soustavy tří rovnoběžných souhlasně orientovaných sil jedinou staticky ekvivalentní silou ($\vec{F}_v \neq \vec{0}$), viz. obr. 9.9.



Obr. 9.8:

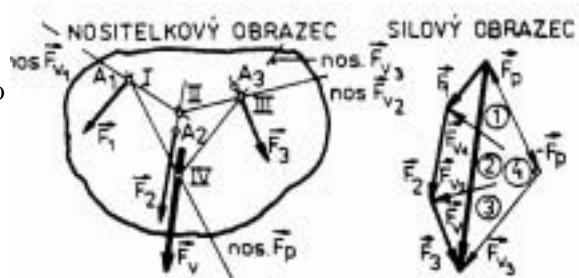
Postup řešení:

K soustavě tří rovnoběžných sil \vec{F}_1 , \vec{F}_2 a \vec{F}_3 připojíme rovnovážnou soustavu sil $\{\vec{F}_p, -\vec{F}_p\}$ na společné nositelce, která protíná nositelky zadaných sil. Síly \vec{F}_1 a \vec{F}_p nahradíme podle věty o třech silách staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v1} , jejíž nositelka prochází průsečíkem nositelek sil \vec{F}_1 a \vec{F}_p (bod I) a velikost, směr a orientaci určíme ze silového trojúhelníka ①. Síly \vec{F}_{v1} a \vec{F}_2 obdobně nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v2} . Postup opakujeme pro síly \vec{F}_{v2} a \vec{F}_3 . Síla \vec{F}_{v3} je staticky ekvivalentní silám \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 a \vec{F}_p . Na těleso v této fázi řešení působí síly \vec{F}_{v3} a $-\vec{F}_p$, které podle věty o třech silách nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v , jejíž nositelka prochází průsečíkem nositelek sil \vec{F}_{v3} a $-\vec{F}_p$ (bod IV). Velikost, směr a orientaci \vec{F}_v určíme ze silového trojúhelníka ④. Síla \vec{F}_v je staticky ekvivalentní se soustavou sil \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 (viz obr. 9.9).



Obr. 9.9:

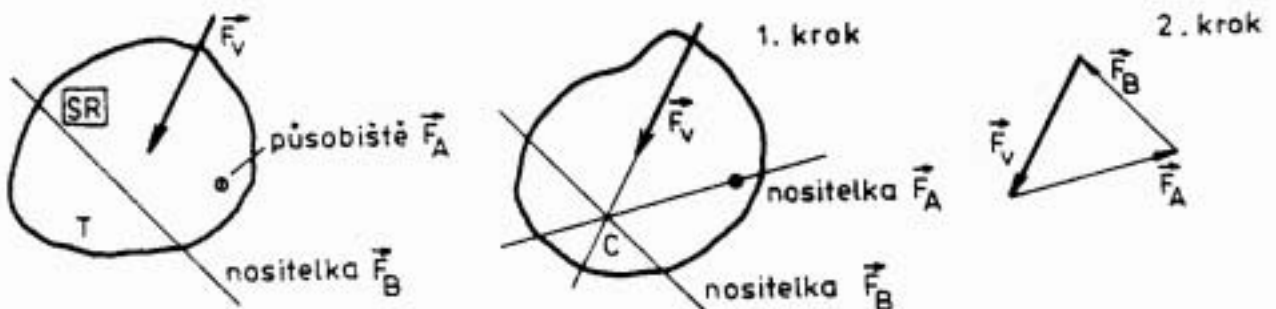
Stejný postup zvolíme i v případě, že síly jsou různoběžné, ale úhly, které svírají nositelky jsou "malé" (průsečíky nositelek sil se nacházejí mimo pracovní plochu). Postup řešení je stejný jako v předchozím případě a je zřejmý ze silového a nositelkového obrazce na obr. 9.10.



Obr. 9.10:

V předchozích grafických konstrukcích jsme řešili úlohy, kdy na těleso působila pouze soustava úplně zadaných silových prvků π . Dále se budeme zabývat grafickými konstrukcemi charakteristickými tím, že na těleso působí jak soustava úplně zadaných silových prvků, tak soustava neúplně určená. Tato situace vzniká po uvolnění tělesa ze stykových vazeb.

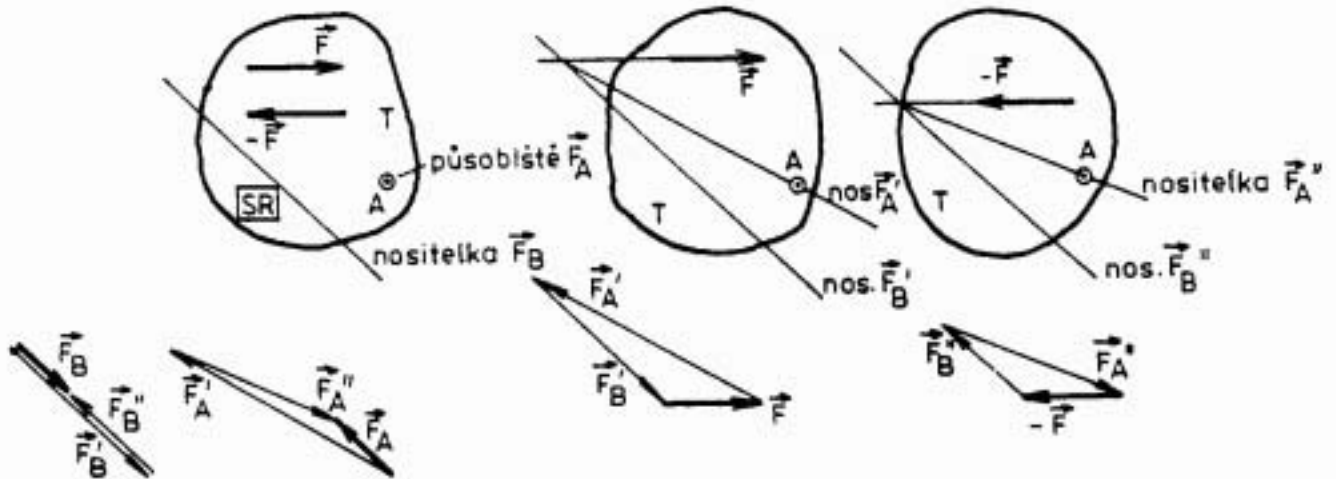
1. Na těleso T, které je ve statické rovnováze, působí úplně určená soustava $\pi = \{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a neúplně určená soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$, kde \vec{F}_A , \vec{F}_B jsou neúplně zadané silové prvky, pro které známe: \vec{F}_A – působíště, \vec{F}_B – nositelku. Je-li $\vec{F}_v \neq \vec{0}$, $\vec{M} = \vec{0}$, pak na těleso působí tři síly \vec{F}_A , \vec{F}_B , \vec{F}_v a těleso je ve statické rovnováze.



Obr. 9.11:

Podle věty o třech silách, se nositelky \vec{F}_A , \vec{F}_B , a \vec{F}_v se protínají v jednom bodě a silový obrazec je uzavřen se šipkami v jednom smyslu. V prvním kroku řešení sestrojíme nositelky sil, které procházejí bodem C a v druhém kroku sestrojíme silový obrazec, viz obr. 9.11.

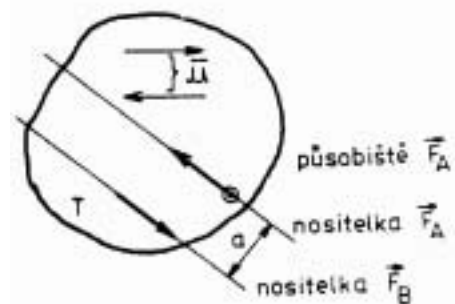
2. Soustava π je točivá, určená \vec{M} a soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$, viz obr. 9.12. Pro \vec{F}_A, \vec{F}_B stejně jako v předchozím případě známe: \vec{F}_A – působíště, \vec{F}_B – nositelku. Těleso T je ve statické rovnováze.



Obr. 9.12:

Silová soustava π je jednoznačně určena momentem \vec{M} . Nejjednodušší silovou soustavou, která má uvedené vlastnosti π je silová dvojice. Síly \vec{F} a $-\vec{F}$ jsou stejně velké, opačně orientované a leží na rovnoběžných nositelkách. Vzdálenost nositelek určíme ze vztahu $d = \frac{M}{F}$, přičemž velikost F jsme zvolili. Úlohu řešíme s použitím superpozice. Působí-li na těleso síla \vec{F} , určíme síly \vec{F}_A a \vec{F}_B podle věty o třech silách a označíme je \vec{F}'_A a \vec{F}'_B , viz. úloha **1**. Obdobně pro sílu $-\vec{F}$ vyřešíme síly \vec{F}''_A a \vec{F}''_B . Síla \vec{F}_A je výslednicí sil \vec{F}'_A a \vec{F}''_A a síla \vec{F}_B je výslednicí \vec{F}'_B a \vec{F}''_B .

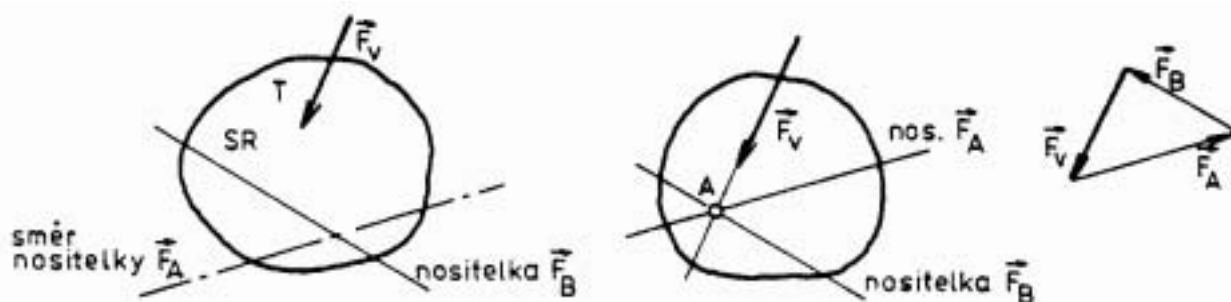
Tuto úlohu můžeme výhodně řešit na základě následující úvahy. Soustava π působící na těleso je určena momentem \vec{M} . Podmínka statické rovnováhy bude splněna, budou-li síly \vec{F}_A a \vec{F}_B tvořit silovou dvojici, jejíž moment $\vec{M}_d = -\vec{M}$, tedy je-li nositelka síly \vec{F}_A rovnoběžná s nositelkou síly \vec{F}_B a prochází bodem A (obr. 9.13). Vzdálenost a nositelek změříme a velikost sil \vec{F}_A a \vec{F}_B určíme poččetně ze vztahu $F_A = F_B = \frac{M}{a}$, orientace sil \vec{F}_A, \vec{F}_B je dána podmínkou $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Výhoda uvedeného graficko-početního řešení spočívá v tom, že je jednodušší než grafické řešení a zachovává názornost grafického řešení při určení polohy nositelek a orientace sil.



Obr. 9.13:

3. Soustava π je určena výslednicovým bivektorem $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro \vec{F}_A a \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A – směr nositelky, \vec{F}_B – nositelku

Na těleso, které je ve statické rovnováze, působí tři síly. Podle věty o třech silách se nositelky

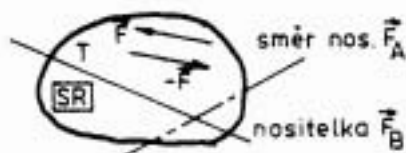


Obr. 9.14:

protínají v jediném bodě A. Další postup je stejný jako u [1] a zřejmý z obr. 9.14.

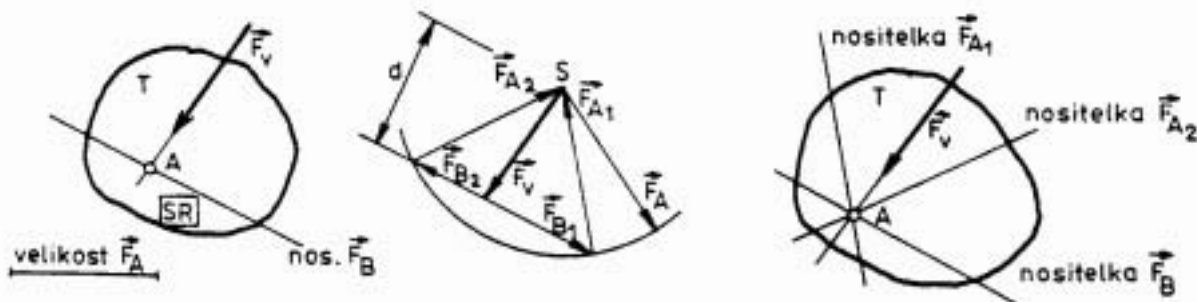
[4.] Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$, soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe stejné veličiny jako v případě [3]: pro \vec{F}_A – směr nositelky, pro \vec{F}_B – nositelku.

Statická rovnováha nastane pouze tehdy, budou-li síly \vec{F}_A, \vec{F}_B tvořit silovou dvojici určenou momentem $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Tato podmínka je splněna pouze tehdy, když nositelka \vec{F}_B je rovnoběžná se směrem nositelky \vec{F}_A (na obr. 9.15 je znázorněn případ, kdy statická rovnováha není možná). Velikost F_A, F_B určíme početně z podmínky $F_A \cdot a = F_B \cdot a = \mathcal{M}$. V této rovnici buď F_A nebo a zvolíme a zbylý parametr vypočítáme.



Obr. 9.15:

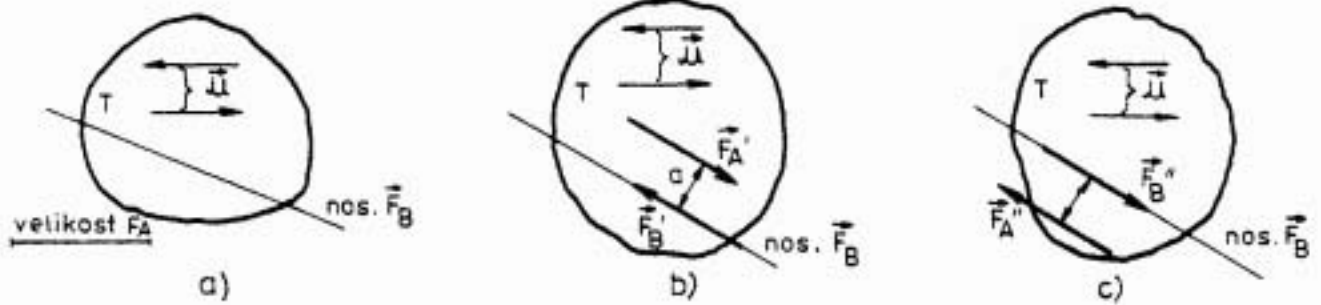
[5.] Soustava π je určena $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$, soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: F_A – velikost, F_B – nositelku.



Obr. 9.16:

Grafická konstrukce je zřejmá z obrázku obr. 9.16. Z něj je zřejmé, že úloha má jedno řešení (jestliže v silovém obrazci $F_A = d$), dvě řešení (jestliže $F_A > d$) nebo reálné řešení neexistuje (v případě $F_A < d$).

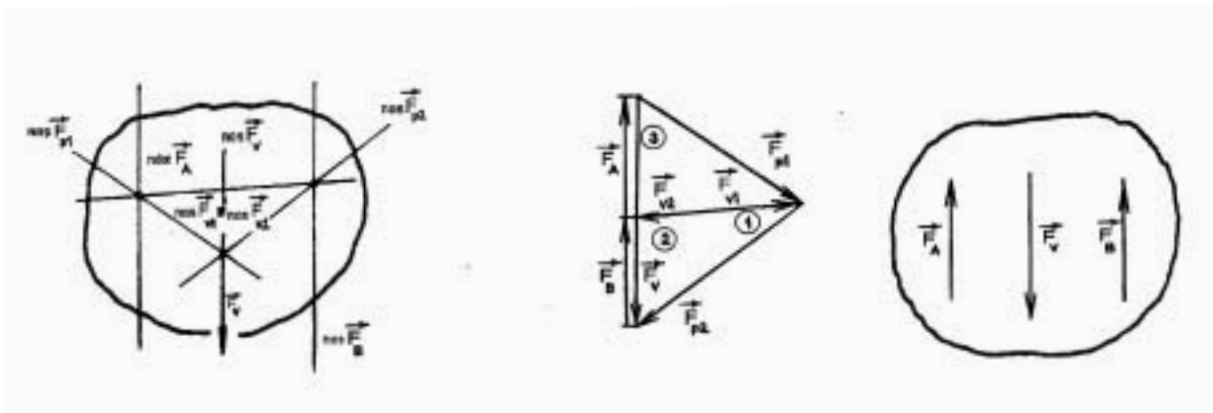
[6.] Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$, soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: F_A – velikost, F_B – nositelku.



Obr. 9.17:

Statická rovnováha nastane pokud \vec{F}_A a \vec{F}_B budou tvořit silovou dvojici určenou momentem $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Nositelka síly \vec{F}_A musí být rovnoběžná s nositelkou síly \vec{F}_B . Jejich vzdálenost určíme výpočtem ze vztahu $a = \frac{M}{F_A}$. Úloha má dvě řešení viz obr. 9.17b a obr. 9.17c.

7.1 Na těleso T, které je ve statické rovnováze, působí úplně určená soustava $\pi = \{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a neúplně určená soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro neúplně zadané silové prvky známe: \vec{F}_A – působišť, \vec{F}_B – nositelku. Soustava sil $\pi \cup \pi_R$, působících na uvolněné těleso, je rovinná soustava sil na rovnoběžných nositelkách.

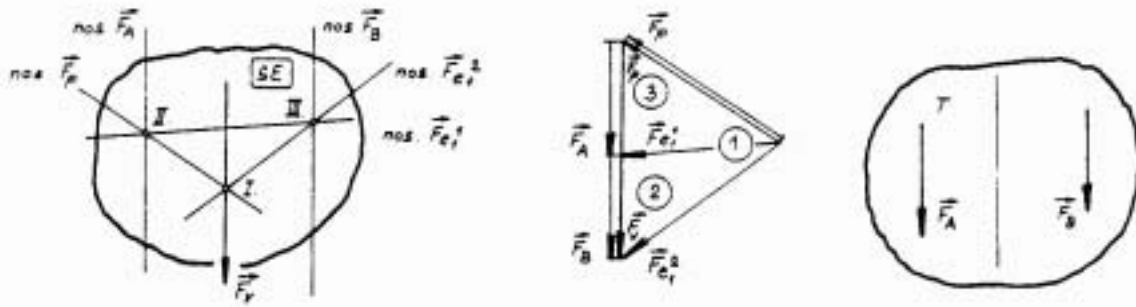


Obr. 9.18:

Větu o třech silách nelze v tomto případě použít přímo – nositelky sil se protínají v úběžném bodě a síly \vec{F}_A a \vec{F}_B v silovém obrazci nelze určit (pouze $\vec{F}_A + \vec{F}_B = -\vec{F}_v$). Při grafickém řešení je proto nutno zvolit dále popsany postup. Nejdříve ve smyslu statické ekvivalence nahradíme sílu \vec{F}_v dvěma libovolnými pomocnými silami \vec{F}_{p1} a \vec{F}_{p2} (silový obrazec ①) – nositelky těchto tří sil se v nositelkovém obrazci protínají v jednom bodě I (je to libovolný bod na nositelce síly \vec{F}_v – viz. možnost posouvání působišť sil). Na uvolněné těleso nyní působí čtyři síly (\vec{F}_{p1} , \vec{F}_{p2} , \vec{F}_A a \vec{F}_B). Libovolně zvolené dvě a dvě z těchto sil můžeme nahradit jejich staticky ekvivalentními výslednicemi \vec{F}_{v1} a \vec{F}_{v2} , jejichž nositelky musí splňovat podmínky věty o třech silách (zvolíme např. $\vec{F}_{p1} + \vec{F}_A = \vec{F}_{v1}$ a $\vec{F}_{p2} + \vec{F}_B = \vec{F}_{v2}$ – v nositelkovém obrazci dostáváme průsečíky II a III). Protože těleso je ve statické rovnováze, musejí síly \vec{F}_{v1} a \vec{F}_{v2} (působící na těleso v této fázi řešení) splňovat podmínku věty o dvou silách t.j. mít společnou nositelku procházející body II a III a musí platit, že $\vec{F}_{v1} = -\vec{F}_{v2}$. V silovém obrazci ① vedeme s touto nositelkou rovnoběžku společným

bodem sil \vec{F}_{p1} , a \vec{F}_{p2} a dostáváme silové obrazce ③ ($\vec{F}_A + \vec{F}_{p1} = \vec{F}_{v1}$) a ② ($\vec{F}_{p2} + \vec{F}_B = \vec{F}_{v2}$), v nichž jsou graficky zobrazeny hledané síly \vec{F}_A a \vec{F}_B .

7.2 Soustava π je určena $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A – nositelku, \vec{F}_B – nositelku a $\pi \cup \pi_R$ je rovinná soustava rovnoběžných sil. Neznámými veličinami jsou velikosti a orientace sil \vec{F}_A a \vec{F}_B . Cílem této úlohy je staticky ekvivalentní nahrazení síly \vec{F}_v dvěma rovnoběžnými silami \vec{F}_A a \vec{F}_B na daných nositelkách.

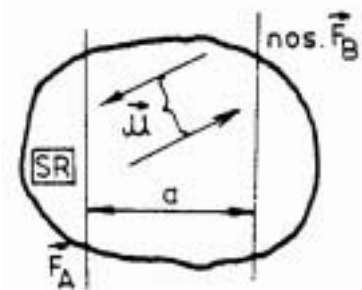


Obr. 9.19:

Soustava sil $\{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ má být staticky ekvivalentní se silou \vec{F}_v . Statickou ekvivalenci nezměníme, jestliže k oběma soustavám připojíme stejnou sílu \vec{F}_p , tedy soustava $\pi_1 = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_p\}$ je staticky ekvivalentní se soustavou $\pi_2 = \{\vec{F}_v, \vec{F}_p\}$. Soustavu $\pi_2 = \{\vec{F}_v, \vec{F}_p\}$ nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e1}^2 a síly \vec{F}_A a \vec{F}_p staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e1}^1 , pro kterou podle věty o třech silách známe bod nositelky (II). Síla \vec{F}_{e1}^2 , kterou známe úplně, je staticky ekvivalentní se silami \vec{F}_B a \vec{F}_{e1}^1 . Podle věty o třech silách se nositelky sil $\vec{F}_{e1}^2, \vec{F}_B$, a \vec{F}_{e1}^1 musejí protínat v jednom bodě III. Nositelka síly \vec{F}_{e1}^1 musí procházet body II a III. Protože známe nositelky sil $\vec{F}_B, \vec{F}_{e1}^1$ a sílu \vec{F}_{e1}^2 úplně, můžeme ze silového obrazce určit také \vec{F}_B , a \vec{F}_{e1}^1 úplně (viz. silový obrazec ②). Současně ze silového obrazce ③ můžeme určit \vec{F}_A . Silový obrazec ③ s nositelkami sil \vec{F}_p, \vec{F}_A a \vec{F}_{e1}^1 , vyjadřuje statickou ekvivalenci sil \vec{F}_p, \vec{F}_A se silou \vec{F}_{e1}^1 .

8. Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$ a soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A – nositelku, \vec{F}_B – nositelku, přičemž nositelky \vec{F}_A a \vec{F}_B jsou rovnoběžné (viz obr. 9.20).

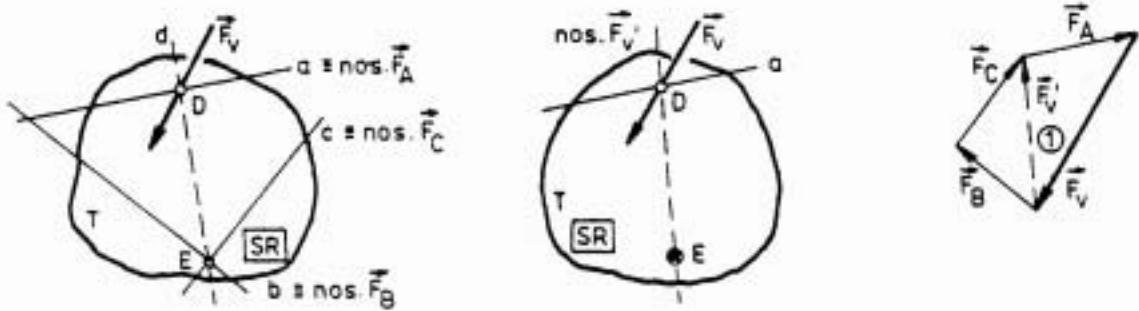
Statická rovnováha nastane, jestliže \vec{F}_A, \vec{F}_B tvoří silovou dvojici určenou $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Velikost sil \vec{F}_A , a \vec{F}_B určíme ze vztahu $F_A = F_B = \frac{M}{a}$.



Obr. 9.20:

9. Soustava π je určena výslednicovým bivektorem $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C\}$. Pro $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ známe nositelky, které leží v jedné rovině s nositelkou \vec{F}_v , neprocházejí jediným bodem a nejsou vzájemně rovnoběžné (viz obr. 9.21).

Nahradíme-li síly \vec{F}_B a \vec{F}_C staticky ekvivalentní silou \vec{F}'_v , pak nositelka \vec{F}'_v podle věty o třech silách prochází bodem E. Na těleso T působí tři síly \vec{F}'_v, \vec{F}_A a \vec{F}_B , podle věty o třech silách se jejich nositelky protínají v jediném bodě D. Nositelka síly \vec{F}'_v prochází body E a D. Sestrojíme

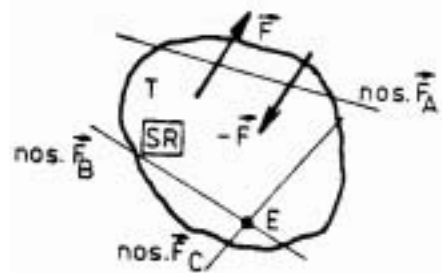


Obr. 9.21:

silový trojúhelník ①. Sílu \vec{F}'_v nahradíme dvěma silami \vec{F}_B a \vec{F}_C na daných nositelkách. Nositelka síly \vec{F}'_v se nazývá Culmannovou přímkou. Stejný výsledek musíme dostat i při jiné výchozí volbě sil na začátku řešení (např. \vec{F}_A a \vec{F}_B nebo \vec{F}_A a \vec{F}_C).

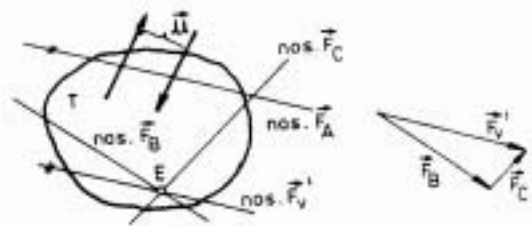
10. Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$ a $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C\}$. Pro $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ známe nositelky, které leží v jedné rovině kolmé na nositelku \vec{M} , neprocházejí jediným bodem a nejsou vzájemně rovnoběžné (obr. 9.22).

Úlohu můžeme řešit superpozicí jako dvě úlohy [9] pro síly \vec{F} a $-\vec{F}$, které tvoří silovou dvojici jednoznačně určenou \vec{M} . Výhodnější však bude řešení úlohy graficko-počtním způsobem. Na základě věty o třech silách nahradíme libovolné dvě ze sil $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ jejich staticky ekvivalentní silou. Například \vec{F}_B a \vec{F}_C nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}'_v . Nositelka síly \vec{F}'_v prochází bodem E.



Obr. 9.22:

Podmínka statické rovnováhy bude splněna tehdy, budou-li síly \vec{F}'_v a \vec{F}_A tvořit silovou dvojici určenou momentem $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Tedy nositelka \vec{F}'_v je rovnoběžná s \vec{F}_A a prochází bodem E (viz obr. 9.23). Velikost \vec{F}_A a \vec{F}'_v určíme z podmínky $F'_v = F_A = \frac{M}{b}$. Dále určíme síly \vec{F}_B a \vec{F}_C tak, že sílu \vec{F}'_v nahradíme staticky ekvivalentními silami \vec{F}_B a \vec{F}_C na daných nositelkách. Velikost a orientace sil \vec{F}_B a \vec{F}_C určíme ze silového obrazce.



Obr. 9.23:

9.3 Grafické řešení statické rovnováhy vázaného tělesa

Po formulaci základních vět grafického řešení a výkladu základních grafických konstrukcí můžeme přikročit ke grafickému řešení statické rovnováhy vázaných těles. Budeme vycházet z algoritmu výpočtového řešení statické rovnováhy vázaného tělesa. Postup při výpočtovém a grafickém řešení se odlišuje v krocích d - f, tyto kroky grafického řešení jsou uvedeny na začátku této kapitoly.



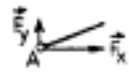

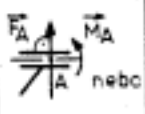
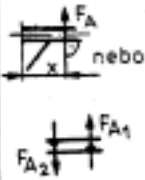
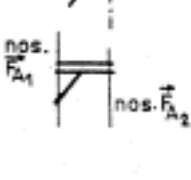
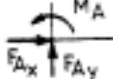
Významně se také bude lišit **interpretace uvolnění** v důsledku toho, že při grafickém řešení pracujeme s celky (bod, nositelka síly, orientovaná úsečka zobrazující sílu atd.) na rozdíl od výpočtového řešení, kde pracujeme s prvky (souřadnice bodu, souřadnice síly atd.).

Při uvolnění tělesa pro grafické řešení je třeba znázornit známé geometrické útvary grafického zobrazení statické úlohy, které vyplývají z úplně zadané soustavy π a z uložení tělesa. Na jejich základě ze statické podmínky rovnováhy, pokud je to možné, určíme neznámé geometrické útvary, které zpětně zobrazíme na statické veličiny.

Vyjádření statické podmínky pro grafické řešení je následující:

- silový obrazec je uzavřen
 - v jednom smyslu, pro statickou rovnováhu tělesa
 - smysl staticky ekvivalentní síly je opačný ke smyslu ostatních sil, pro statickou ekvivalenci silových soustav
- pro obrazec nositelek nelze vyslovit názornou podmínku, kterou musí splňovat nositelky všech sil, lze ji však formulovat pro soustavu dvou a tří sil (viz. věty o dvou a třech silách).

Poznámka: Skutečnost, že nelze formulovat názornou podmínku, kterou musí splňovat nositelky všech sil, je příčinou, proč grafické řešení musíme rozdělit na posloupnost jednoduchých operací založených na větách o dvou a třech silách a větě o superpozici.

Název	Zn.	Uvolnění	NP stykového bivektoru	Známé parametry stykového bivektoru	Geometrické vyjádření
Obecná	o		F_n	nositelka styk. výsl.	
Rotační	r		F_x, F_y	působíště styk. výsl.	
Posuvná	p		F_A, M_A	směr styk. výsl.	směr nositelky \vec{F}_A
			F_{A1}, F_{A2}	směr styk. výsl. působ. a nositelky	
Vetknutí	n		F_{Ax}, F_{Ay}, M_A	nic	nic

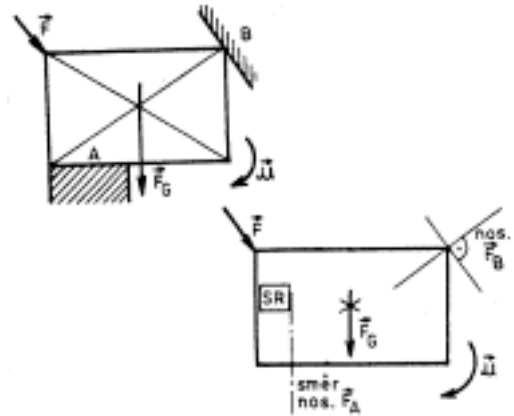
Obr. 9.24:

Přehled uvolnění jednotlivých rovinných stykových vazeb pro výpočtové a grafické řešení je znázorněn v tabulce (obr. 9.24).

Nyní přistoupíme ke grafickému řešení příkladu z kapitoly 7 (viz obr. 9.25).

Ukážeme několik postupů a problémů, které se při grafickém řešení mohou vyskytovat. Řešení nebudeme provádět celé, ale zaměříme se pouze na ty kroky, které jsou při grafickém a výpočtovém řešení odlišné.

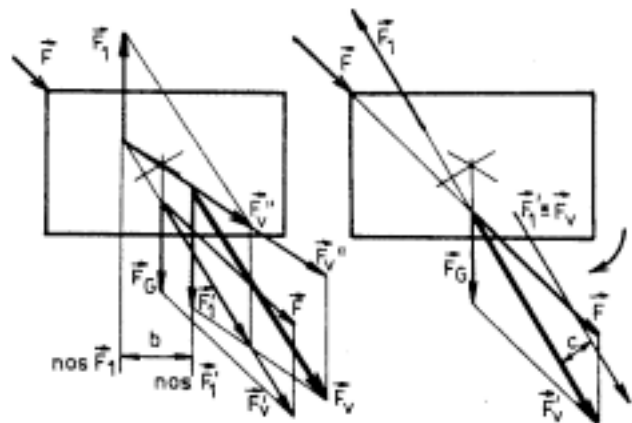
Na těleso působí soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}, \vec{F}_G, \vec{M}\}$ a soustava neúplně určená $\pi_r = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$. Při řešení neznámých veličin neúplně určených sil můžeme postupovat takto:



Obr. 9.25:

- Soustavu π nahradíme jedinou staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v nebo jedinou silovou dvojicí \vec{M}_v je-li $\vec{F}_v = \vec{0}$ (rovinná úloha) a pro ně určíme neznámé veličiny neúplně určených sil.
 - Řešení provádíme s využitím superpozice zvláště pro síly \vec{F} , \vec{F}_G a silovou dvojici určenou momentem \vec{M} . Tato dílčí řešení neznámých veličin neúplně určených sil pak nahradíme výsledným staticky ekvivalentním řešením.
- ad a) Síly \vec{F} a \vec{F}_G nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v . Nejjednodušší silová soustava, která je jednoznačně určená momentem \vec{M} je silová dvojice, pro kterou platí $\mathcal{M} = F_1 \cdot b = F'_1 \cdot b$. Zvolíme-li jednu z veličin F_1, b pak druhou dopočítáme, například F_1 zvolíme a vzdálenost nositelek b vypočítáme ze vztahu $b = \frac{\mathcal{M}}{F_1}$. Smysl síly \vec{F}_1 zvolíme tak, aby silová dvojice \vec{F}_1, \vec{F}'_1 měla stejný smysl jako \vec{M} . Síly \vec{F}'_v a \vec{F}_1 nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}''_v a obdobně \vec{F}''_v a \vec{F}'_1 staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v .

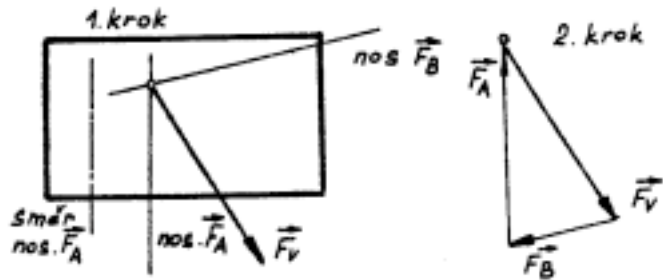
Efektivněji můžeme staticky ekvivalentní sílu určit takto: Síly \vec{F} a \vec{F}_G nahradíme stejně jako v předchozím postupu silou \vec{F}'_v . Protože sílu \vec{F}_1 můžeme volit, zvolíme ji na nositelce síly \vec{F}'_v stejně velikou, ale opačně orientovanou k \vec{F}'_v . Dále určíme vzdálenost c nositelek sil \vec{F}_1 a \vec{F}'_1 ze vztahu $c = \frac{\mathcal{M}}{F_1}$. Síly \vec{F}'_v a \vec{F}_1 tvoří rovnovážnou soustavu a síla \vec{F}'_1 je staticky ekvivalentní se soustavou π (viz obr. 9.26).



Obr. 9.26:

Další postup řešení je stejný jako u úlohy [3]. Na těleso působí tři síly \vec{F}_A , \vec{F}_B , \vec{F}_v . Podle věty o třech silách určíme v prvním kroku nositelky a ve druhém velikost a smysl \vec{F}_A , \vec{F}_B (viz obr. 9.27).

Poznámka: Pokud $\vec{F}_v = \vec{0}$ a $\vec{M} \neq \vec{0}$, rovnováha tělesa vázaného jednostrannou posuvnou a obecnou kinematickou dvojicí v zadané konfiguraci vazeb nemůže nastat.



Obr. 9.27:

ad b) Řešení dílčích stykových sil \vec{F}_A , \vec{F}_B působí-li na těleso pouze \vec{F} nebo \vec{F}_G je obdobné jako při postupu a) pro sílu \vec{F}_v . Dále se budeme zabývat řešením dílčích stykových sil \vec{F}_A , \vec{F}_B , působí-li na těleso pouze silová dvojice určená momentem \vec{M} . Protože nositelky \vec{F}_A , \vec{F}_B nejsou rovnoběžné, nelze tyto dílčí stykové síly určit.

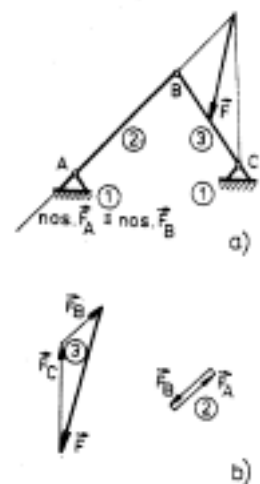
Nyní musíme zdůvodnit, proč tento postup nevede k řešení. Řešíme-li úlohu zvlášť pro síly \vec{F} , \vec{F}_G a \vec{M} , provádíme řešení superpozicí. Z věty o superpozici víme, že základním předpokladem je linearita úlohy. Vzhledem k tomu, že u stykové síly \vec{F}_A neznáme polohu nositelky a velikost, je tato úloha nelineární. Proto postup b) nevede k řešení úlohy.

9.4 Grafické řešení statické rovnováhy soustavy těles

V souladu s kapitolou 8 budeme pod pojmem statická rovnováha soustavy těles rozumět podmíněnou statickou rovnováhu. To znamená, že soustava je ve statické rovnováze tehdy, je-li každý její prvek a tedy i každá podsoustava ve statické rovnováze. Grafické řešení statické rovnováhy soustavy těles spočívá v posloupnosti grafických řešení neznámých veličin stykových sil působících na uvolněné prvky soustavy těles. Neznámé veličiny stykových sil řešíme graficky na základě podmínky statické rovnováhy uvolněného členu soustavy těles.

Vzhledem k tomu, že podmínka statické rovnováhy pro grafické řešení má část týkající se nositelek neznámých sil a část týkající se velikosti a smyslu neznámých sil a protože neznámé veličiny se vztahují zpravidla ke dvěma prvkům soustavy těles, není posloupnost grafických řešení vždy přímá, ale může obsahovat zpětné kroky.

Uvažme například soustavu znázorněnou na obr. 9.28a. Člen ② je binární nezátížený člen, na který působí stykové síly \vec{F}_A , \vec{F}_B , u kterých známe působíště. Neznámými veličinami jsou nositelky a velikosti sil. Z věty o dvou silách určíme nositelky, ale nemůžeme určit velikosti stykových sil \vec{F}_A , \vec{F}_B . V řešení pokračujeme uvolněním členu ③. Na člen ③ působí úplně zadaná síla \vec{F} a neúplně určené stykové síly \vec{F}_B a \vec{F}_C . Z řešení neznámých veličin stykových sil působících na člen ② známe nositelku síly \vec{F}_B . Využitím věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_C a sestrojíme silový obrazec sil působících na člen ③ (viz obr. 9.28b). Tím jsme určili všechny neznámé veličiny stykových sil působících na člen ③ a můžeme se vrátit zpět na člen ②. Vzhledem k tomu, že jsme úplně určili sílu \vec{F}_B , můžeme sestrojit silový obrazec členu ②.

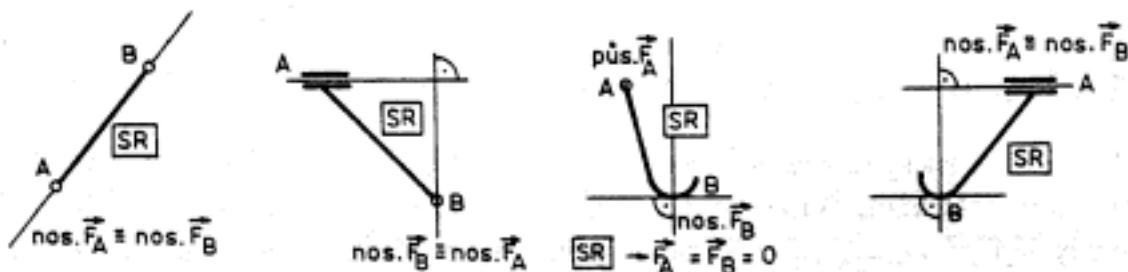


Obr. 9.28:

K určení posloupnosti grafického řešení, které vede k určení všech neznámých veličin, můžeme zvolit dvojí přístup – náhodný nebo promyšlený.

Při náhodném postupu řešení uvolňujeme náhodně prvky soustavy a na uvolněném prvku se snažíme z podmínky rovnováhy pro grafické řešení určit neznámé veličiny. Postup uvolňování jednotlivých prvků může být například podle zvoleného pořadí očíslování členů, které jsme zvolili zcela náhodně.

Promyšlený postup je charakteristický analýzou soustavy z hlediska počtu sil, druhu neznámých veličin vztahujících se k jednotlivým tělesům a podsoustavám soustavy. Z těchto hledisek je vhodné všimnout si především binárních nezatížených členů. Pokud soustava takový člen obsahuje, pak řešení tímto členem zpravidla začínáme. U binárních nezatížených členů vázaných libovolnou kombinací kinematických dvojic typu kdo, kdr a kdp jsme vždy schopni na základě věty o dvou silách určit nositelky sil (obr. 9.29).

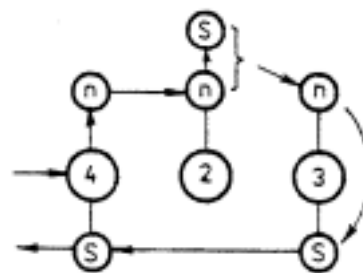


Obr. 9.29:

Při promyšleném postupu grafického řešení si posloupnost grafických operací, která vede na určení všech neznámých veličin, nejdříve vytvoříme v představě, kterou je možné zobrazit orientovaným grafem. Orientovaný graf zobrazuje posloupnost uvolněných prvků a podsoustav soustavy těles, na kterých můžeme určit na základě jedné ze dvou částí statické podmínky rovnováhy v grafickém vyjádření odpovídající neznámé veličiny (velikosti nebo nositelky) stykových sil působících na daný prvek resp. podsoustavu. K tomuto vyjádření budeme používat symboly uvedené v obr. 9.30.

Schema uvedené v obr. 9.31 charakterizuje tento postup řešení:

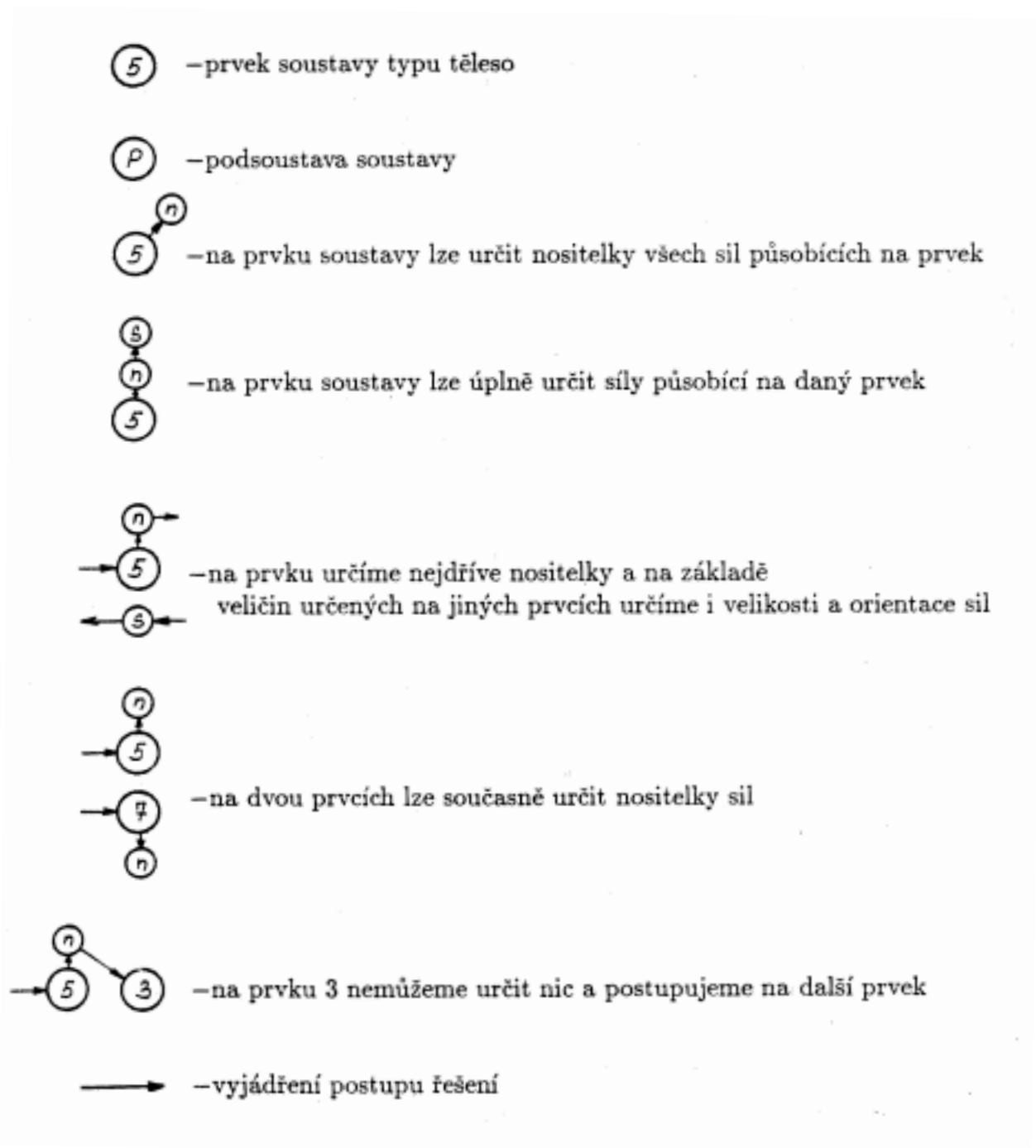
Řešení začíná uvolněním členu ④ a na základě podmínky statické rovnováhy pro grafické řešení a známých veličin ze zadání soustavy určíme nositelky stykových sil působících na člen ②. Dále pokračujeme uvolněním členu ②. Z podmínky statické rovnováhy pro grafické řešení a známých veličin ze zadání soustavy a určených nositelek stykových sil působících na člen ④ určíme stykové síly působící na člen ②. Dále uvolníme člen ③. Na základě podmínky statické rovnováhy pro grafické řešení a známých veličin ze zadání a předchozího řešení určíme úplně i stykové síly působící na člen ③. Nyní se vrátíme na člen ④ a určíme velikost a smysl stykových sil působících na tento člen.



Obr. 9.31:

Z hlediska postupu při řešení statické rovnováhy soustav těles rozlišujeme čtyři základní úlohy, které si ukážeme na jednoduchých příkladech.

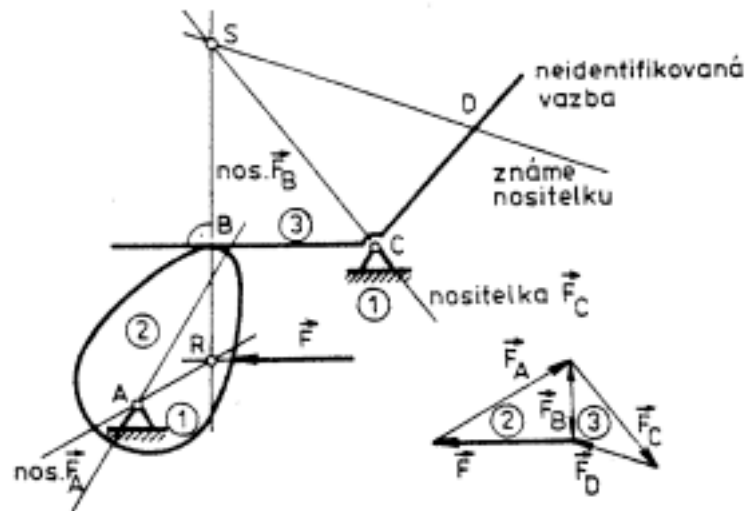
První úloha je charakteristická tím, že při vhodné posloupnosti uvolňování prvků můžeme



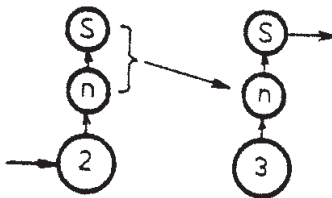
Obr. 9.30:

na každém uvolněném prvku určit všechny neznámé veličiny (obr. 9.32). Postup můžeme charakterizovat schématem uvedeným na obr. 9.33.

Postup řešení: - Uvolníme binární zatížený člen ②. Na člen ② působí tři síly. Úplně zadaná síla \vec{F} , styková síla \vec{F}_B , jejíž nositelka prochází bodem B kolmo na člen ③ a styková síla \vec{F}_A , která prochází bodem A. Nositelky sil \vec{F} a \vec{F}_B se protínají v bodě R.



Obr. 9.32:



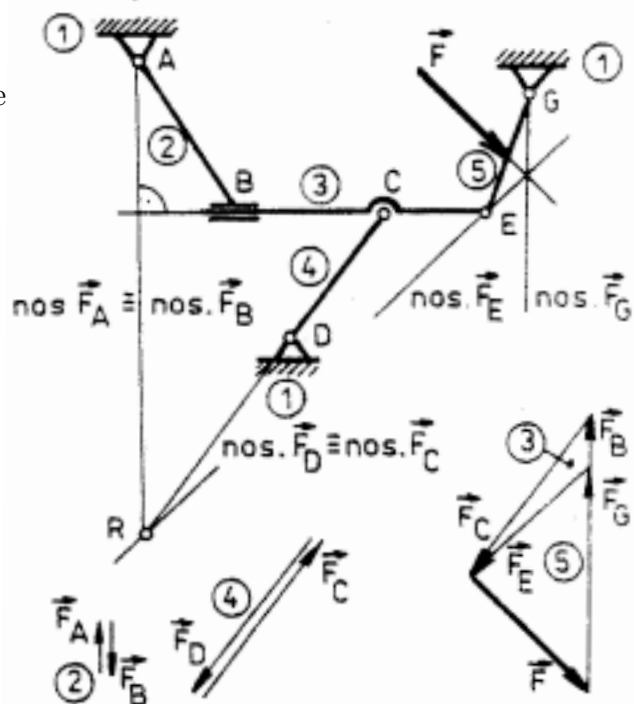
Obr. 9.33:

Na základě věty o třech silách tímto bodem musí procházet také nositelka síly \vec{F}_A , tedy nositelka síly \vec{F}_A je určena body A, R. Protože známe sílu \vec{F} úplně a nositelky sil \vec{F}_B a \vec{F}_A , sestojíme silový trojúhelník prvku ②.

- Uvolníme ternární nezatížený člen ③. Na člen ③ působí styková síla \vec{F}_B , kterou známe úplně, síla \vec{F}_D , pro kterou známe nositelku a styková síla \vec{F}_C , jejíž nositelka prochází bodem C. Na základě věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_C a sestojíme silový trojúhelník ③.

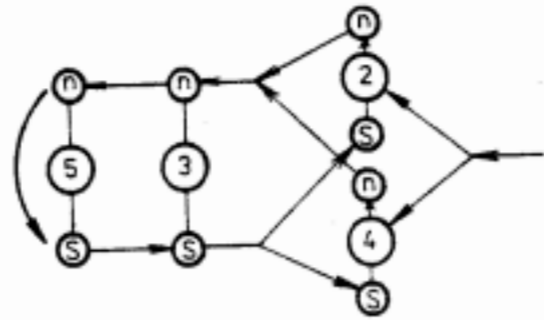
Druhá úloha. Pro grafické řešení této soustavy (obr. 9.34) je charakteristické, že po uvolnění prvků, na žádném prvku nemůžeme určit všechny neznámé veličiny, ale pouze postupným určováním neznámých veličin dosáhneme stavu, kdy na prvku ⑤ můžeme určit všechny neznámé veličiny a vhodným zpětným postupem je určíme i na ostatních prvcích. Postup je schematicky znázorněn na obr. 9.35.

Postup řešení: - Uvolníme binární nezatížený člen ② s jednou kinematickou dvojicí rotační a jednou posuvnou. Na člen ② působí stykové síly \vec{F}_A a \vec{F}_B , přičemž známe působíště stykové síly \vec{F}_A a směr nositelky síly \vec{F}_B . Na základě věty o dvou silách je nositelka síly \vec{F}_A totožná s nositelkou síly \vec{F}_B . Prochází bodem A kolmo k ose posuvu.



Obr. 9.34:

- Uvolníme binární nezatížený člen ④ se dvěma rotačními kinematickými dvojicemi. Na člen ④ působí stykové síly \vec{F}_D a \vec{F}_C s působišti v bodech C a D. Na základě věty o dvou silách je nositelka síly \vec{F}_C totožná s nositelkou síly \vec{F}_D a prochází body C a D.

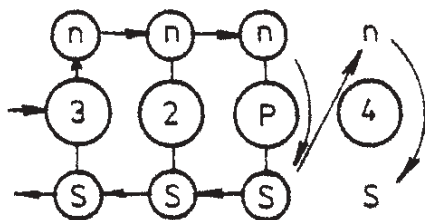
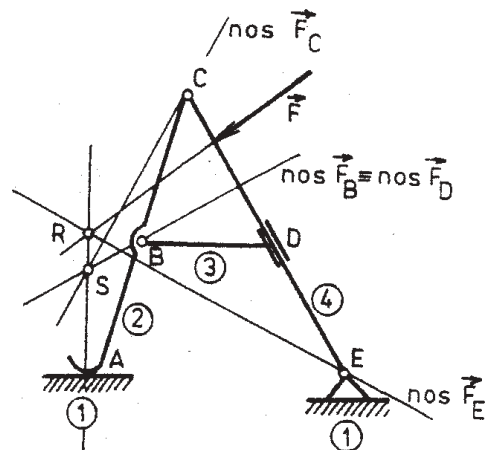


Obr. 9.35:

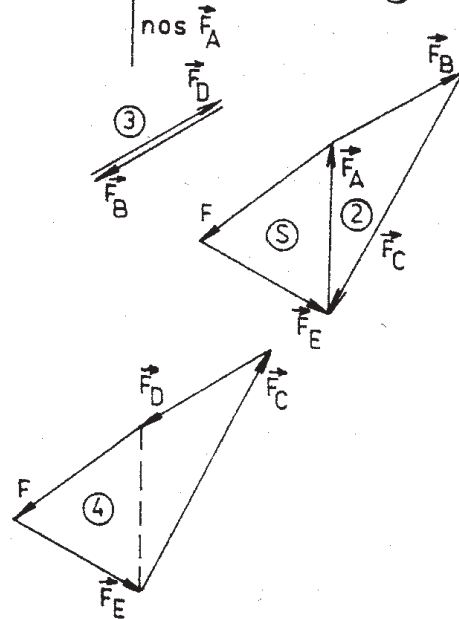
- Uvolníme ternární nezatížený člen ③. Známe nositelky stykových sil \vec{F}_B a \vec{F}_C , které se protínají v bodě R, a dále známe působiště stykové síly \vec{F}_E . Na základě věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_E , která musí procházet body R a E.

- Uvolníme binární zatížený člen ⑤. Na člen ⑤ působí tři síly. Úplně zadaná síla \vec{F} a stykové síly \vec{F}_E a \vec{F}_G . Protože známe nositelku \vec{F}_E a působiště síly \vec{F}_G , můžeme na základě věty o třech silách určit nositelku síly \vec{F}_G a sestavit silový trojúhelník pro člen ⑤ a člen ③.

Třetí úloha. Toto řešení je charakteristické tím, že pro určení všech neznámých veličin musíme uvolnit nejen všechna tělesa, ale také soustavu resp. podsoustavu (obr. 9.36). Postup řešení je schématicky znázorněn v obr. 9.37, kde ① je uvolněná podsoustava členů ③ a ④ od základního tělesa.



Obr. 9.37:



Obr. 9.36:

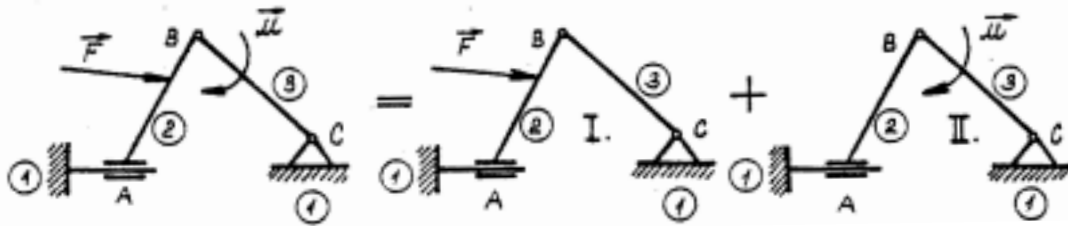
Postup řešení: - Uvolníme binární nezatížený člen ③, na který působí styková síla \vec{F}_B jejíž nositelka prochází bodem B a styková síla \vec{F}_D , jejíž nositelka je kolmá na osu vedení. Podle věty o dvou silách nositelka \vec{F}_B je totožná s nositelkou síly \vec{F}_D , prochází bodem B a je kolmá

na osu vedení.

-Uvolníme ternární nezatížený člen ②, na který působí síla \vec{F}_B , pro niž známe nositelku, síla \vec{F}_A , jejíž nositelka prochází bodem A kolmo na základní těleso a síla \vec{F}_C , jejíž nositelka prochází bodem C. Podle věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_C , která prochází body S a C.

- Uvolníme soustavu, na kterou působí úplně zadaná síla \vec{F} , styková síla \vec{F}_A , jejíž nositelku jsme určili a styková síla \vec{F}_E na nositelce procházející bodem E. Nositelky \vec{F}_A a \vec{F} se protínají v bodě R. Podle věty o třech silách tímto bodem prochází i nositelka síly \vec{F}_E a je dána body R a E. Nyní již můžeme postupně sestavit silové obrazce pro ⑤, ②, ③ a ④.

Čtvrtá úloha. Je charakteristická využitím věty o superpozici. Postup řešení si ukážeme na grafickém řešení stykových sil u soustavy podle obr. 9.38. Nejdříve budeme uvažovat, že na soustavu působí pouze síla \vec{F} a určíme stykové síly, které označíme čárkou. Potom budeme uvažovat pouze působení silové dvojice určené \vec{M} a pro toto působení určíme stykové síly, které označíme dvěma čárkami.

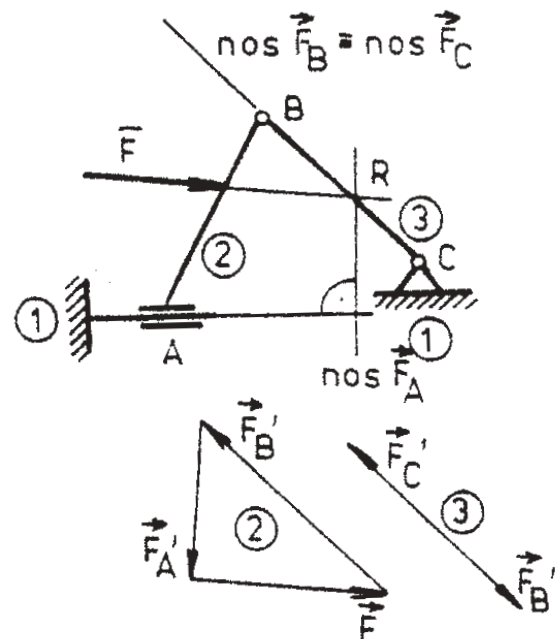


Obr. 9.38:

Výsledné stykové síly pro zadané silové působení se budou rovnat vektorovému součtu stykových sil s čárkou a se dvěma čárkami.

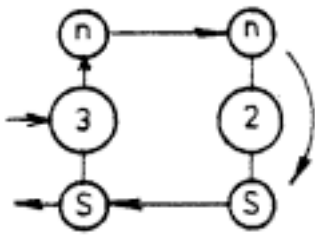
Postup řešení I: - Uvolníme binární nezatížený člen ③, který je vázán dvěma rotačními kinematickými dvojicemi. Na člen ③ působí stykové síly \vec{F}_B a \vec{F}_C s působišti v bodech B a C. Z věty o dvou silách určíme nositelku síly \vec{F}_B , která je totožná s nositelkou síly \vec{F}_C a prochází body B a C (viz obr. 9.39).

- Uvolníme binární zatížený člen ②. Na člen ② působí tři síly. Úplně zadaná síla \vec{F} , styková síla \vec{F}_B , jejíž nositelka prochází body B a C a styková síla \vec{F}_A , jejíž nositelka je kolmá na osu vedení. Nositelky síly \vec{F} a \vec{F}_B se protínají v bodě R. Podle věty o třech silách tímto bodem musí procházet také nositelka \vec{F}_A , která je kolmá na osu vedení. Dále sestojíme silový trojúhelník členu ② a silový obrazec členu ③.



Obr. 9.39:

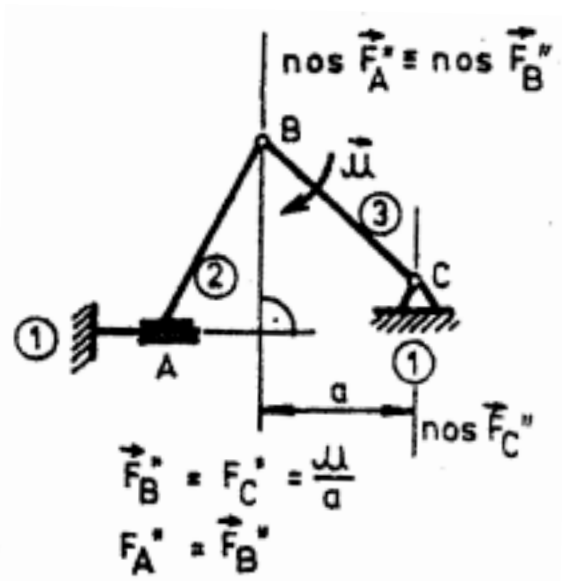
Uvedený postup můžeme charakterizovat schematem znázorněným na obr. 9.40.



Obr. 9.40:

Postup řešení II: - Uvolníme binární nezatížený člen ②, který je vázán jednou rotační a jednou posuvnou kinematickou dvojkou.

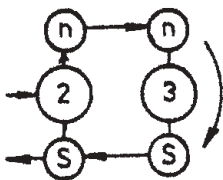
Na člen ② působí dvě síly. Styková síla \vec{F}_B , jejíž nositelka prochází bodem B a styková síla \vec{F}_A , jejíž nositelka je kolmá na osu vedení. Na základě věty o dvou silách nositelka síly \vec{F}_A je totožná s nositelkou \vec{F}_B , prochází bodem B a je kolmá na osu vedení (obr. 9.41).



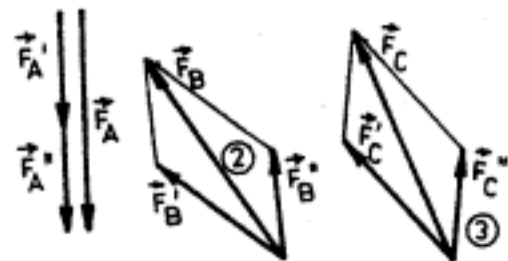
Obr. 9.41:

- Uvolníme člen ③. Na člen ③ působí silová dvojice určená \vec{M} a stykové síly \vec{F}_B a \vec{F}_C . Z podmínky statické rovnováhy musí \vec{F}_B a \vec{F}_C vytvářet silovou dvojici určenou $\vec{M}_d = -\vec{M}$.

- Uvedený postup můžeme charakterizovat schématem znázorněným na obr. 9.42.



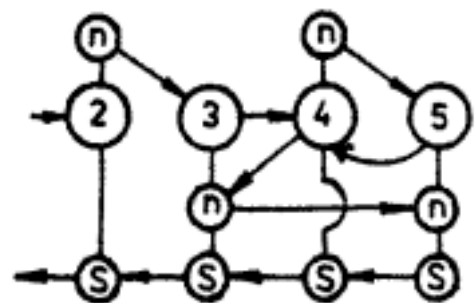
Obr. 9.42:



Obr. 9.43:

- Grafické určení výsledných stykových sil je znázorněno na obr. 9.43.

Řešení všech čtyř úloh byla ukázkou promyšleného postupu řešení. Abychom ukázali rozdíl mezi promyšleným a náhodným řešením, je na obr. 9.44 uvedeno schematické znázornění náhodného postupu řešení druhé úlohy. Posloupnost řešení prvků soustavy byla zvolena podle jejich označení, které bylo na počátku řešení zvoleno zcela náhodně. Srovnání operační složitosti náhodného postupu a promyšleného postupu vyznívá zcela jednoznačně ve prospěch promyšleného postupu řešení.



Obr. 9.44:

10 Tělesa a soustavy těles s vazbami typu NNTP

10.1 Vazby typu NNTP – vazby s pasivními odpory

V kapitole 6 byl analyzován styk těles a byly vymezeny dva základní typy styku lišící se silovými a energetickými podmínkami ve stykovém útvaru ve směru geometricky možného relativního pohybu, označené jako NNTN a NNTP. Dosud bylo probíráno statické řešení vázaného tělesa a soustav těles s vazbami, pro něž styk NNTN je použitelným výpočtovým modelem reálného styku. Tento model, vycházející z předpokladu dokonale hladkých a tuhých těles, popisuje realitu s dostatečnou přesností pouze pro omezený okruh reálných případů:

- a) Pro nepohyblivě uložená tělesa a soustavy těles u kterých relativní pohyb ve styku nemůže nastat a tedy nemůže dojít ani k jeho ovlivňování.
- b) Pro tvrdé, tuhé, leštěné a dobře mazané povrchy ve stykových útvarech pohyblivě uložených těles a jejich soustav – hranice klidové stability a mechanická práce potřebná k realizaci pohybu jsou malé a lze je z hlediska silového působení považovat za nevýznamné.

Z každodenní praxe však víme, že ve většině případů pohyblivého uložení těles a jejich soustav relativní pohyb umožněný geometrií styku nastane, až působící hnací síla dosáhne určité hodnoty. Charakter pohybu je významně ovlivněn podmínkami ve styku a závisí na poloze nositelky, velikosti a směru působení této síly. V těchto případech není styk NNTN použitelným výpočtovým modelem (např. řešení pohybu dopravních prostředků – pokud se při náledí realita blíží k vlastnostem ideálně hladkých vazeb, pak je to vyjimečný a zcela nežádoucí stav). Pro popis reálného ovlivňování pohybu je nutno použít model styku NNTP, který zahrnuje podstatné vlastnosti reálného jevu.

Je známo, že o podmínkách ve styku těles rozhodují významně takové vlastnosti, které lze jen obtížně vyjádřit měřitelnými veličinami. Jsou to především:

1. Konkrétní tvar a rozměry jednotlivých mikronerovností ve stykovém útvaru Γ_s . Obvykle máme k dispozici jen statistické údaje o technologii opracování a kvalitě povrchu tělesa (drsnosti), avšak konkrétní tvar a rozměry mikronerovností v určitém místě styku neznáme.
2. Mechanické vlastnosti mikroobjemů materiálů těles v kontaktu (typ a struktura materiálu, velikost zrn, existence grafit. částic a jejich tvar a rozložení, póry, oxidy a pod.).
3. Lokální elastické a plastické deformace vznikající v mikroobjemech Γ_s (podstatné při smýkání) a makroobjemech Γ_s a blízkého okolí (podstatné při valení) a porušování mikronerovností (viz. úlomky kovu v oleji po záběhu motoru).
4. Vznik studených spojů (mikrosvarů) při lokálním ohřevu a jejich následné porušování.
5. Přítomnost jiných látek ve styku (maziva, oxidy, nečistoty).
6. Teplota – významně ovlivňuje mechanické vlastnosti materiálů těles i vlastnosti maziv.

V průběhu provozu dochází ke změnám, tento proces bývá označován jako zabíhání.

Z uvedeného je zřejmé, že obecně se jedná o složitý komplexní problém a že na této rozlišovací úrovni je jeho praktické řešení nemožné. Cílem statického řešení je však „pouze“ určit, jak uvedené vlastnosti styku ovlivní pohyb tělesa (nebo soustavy těles) jako celku. Z tohoto hlediska je efektivní fenomenologický popis sledovaného jevu t.j. popis toho, jak se existence lokální deformace a porušování v Γ_s a jeho okolí jeví z hlediska ovlivnění pohybu tělesa.

Shrnutí:

- a) Podstatou ovlivňování relativního pohybu stýkajících se těles je existence lokální deformace těles ve stykovém útvaru Γ_s a jeho blízkém okolí a porušování mikrone rovností v Γ_s , což se ve vztahu k pohybu těles jeví jako odpor proti pohybu.
- b) Protože toto ovlivňování působí vždy proti relativnímu pohybu v Γ_s , nesmí informace o relativním pohybu při řešení nikdy chybět !!

Vyšetřováním podmínek ve styku těles se zabývá tribologie. Vzhledem k obtížnosti popisu mikrostruktury stykové plochy je v tribologii základem experimentální přístup, zpracování výsledků měření a jejich zobecnění. Elementární experimenty, týkající se smýkání a valení těles, byly zmiňovány již při studiu fyziky na střední i vysoké škole. Závažnost problematiky však vyžaduje, abychom základní znalosti zopakovali, rozšířili a zobecnili na úrovni studia strojního inženýrství. Proto znovu podrobněji popíšeme dva experimenty, při nichž je vyšetřován přechod hranolu (posuvná vazba) a válce (obecná vazba) z klidu do pohybu na vodorovné podložce, s cílem analyzovat a určit závislost mezi složkami stykových výslednic.

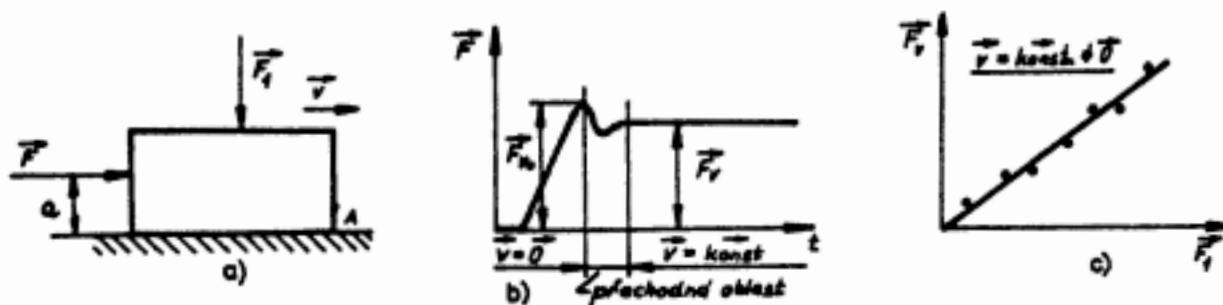
10.1.1 Experiment, jeho vyhodnocení a zobecnění výsledků

Před vlastní realizací experimentu je nutno naplánovat a připravit vše, co s ním souvisí. Je to především:

- výroba vzorků z určitých materiálů, určité drsnosti a čistoty kontaktních ploch, zajištění podmínek opakovatelnosti experimentu
- příprava měřicí techniky
- příprava vyhodnocení měření
- provedení experimentu za definovaných podmínek
- vyhodnocení měření a analýza výsledků
- zobecnění výsledků a návrh teorie použitelné pro výpočtové modelování

Průběh a vyhodnocení experimentu s hranolem:

1. V první části experimentu (jeho uspořádání viz obr. 10.1a) při $F_1 = \text{konst}$ (přítlačná síla) a $a = \text{konst}$ zkoumáme vliv velikosti hnací síly F na pohybový stav tělesa. Řídící veličinou je velikost síly \vec{F} , kterou měníme tak, aby hranol přešel z klidu do rovnoměrného přímočarého pohybu. Zvětšujeme (dostatečně pomalu) velikost $F = \text{var}$ (akční veličina) a měříme rychlost pohybu hranolu \vec{v} . Charakteristické pohybové stavy a výsledky této části experimentu jsou znázorněny v obr. 10.1b. Silové poměry ve styku určíme z rovnic statické rovnováhy uvolněného hranolu (na obr. 10.2 je znázorněn pohybový stav $v = \text{konst}$).



Obr. 10.1:

- a) Při $F = F_t < F_{T,o}$ je $v = 0$ – těleso je v klidu, dosud nebyla překonána hranice klidové stability. Velikosti sil F a F_1 za klidu jsou na sobě nezávislé a po dosažení do podmínek SR hranolu je zřejmé, že rovněž velikosti normální a tečné složky stykové výslednice na sobě nezávisí, tedy $F_t \neq g(F_n)$
- b) Při dosažení $F = F_{T,o}$ byla právě překonána hranice klidu a pohybu – začíná pohyb $v = 0_+$. Přechod z klidu do pohybu je nestabilní. V této fázi pohybu existuje přechodová oblast, v níž se velikost hnací síly $F = F_{T,v}$, potřebná k udržení dosaženého rovnoměrného pohybu tělesa rychlostí $v = \text{konst} \neq 0$, náhle a významně mění.
- c) Jestliže nastal rovnoměrný makroskopický pohyb $v = \text{konst}$, je velikost hnací síly potřebná k jeho udržení menší než pro jeho realizaci $F = F_{T,v} < F_{T,o}$.

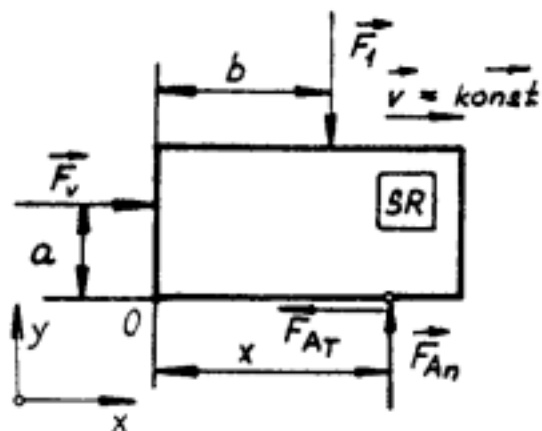
Rovnice statické rovnováhy:

$$F_x: F - F_{AT} = 0 \quad \implies F_{AT} = F$$

$$F_y: F_{An} - F_1 = 0 \quad \implies F_1 = F_{An}$$

$$M_{zO}: -F a - F_1 b + F_{An} x = 0 \quad \implies x$$

2. Předchozí měření opakujeme pro $a = \text{var}$ (parametrická veličina) abychom zjistili, jak hranici klidové stability a pohybový stav tělesa ovlivní změna polohy nositelky hnací síly. Výsledky experimentu lze znázornit graficky (obr. 10.3c). Pokud je $a < a_{hr}$, nezávisí velikost sil $F_{T,o}$ i $F_{T,v}$ na poloze nositelky a . Při $a \geq a_{hr}$ dochází k překlápění (valení) hranolu kolem jeho hrany – tento pohybový stav ale není předmětem našeho zájmu, protože se při něm mění charakter vazby (na obecnou k.d.).



Obr. 10.2:

3. Opět nás zajímá buď právě okamžik přechodu z klidu do pohybu $v = 0_+$, nebo udržování rovnoměrného pohybu $v = \text{konst}$. V obou případech postupně měníme velikost přítláčné síly F_1 a určíme velikost F potřebnou k realizaci požadovaného pohybového

stavu. Z výsledků měření, které lze opět znázornit graficky (v obr. 10.1c je znázorněn stav $v = \text{konst} \neq 0$), vyplývá, že za pohybu existuje závislost $F = g(F_1)$ a (po dosažení ze SR hranolu) tedy i závislost mezi normální a tečnou složkou stykové výslednice $F_T = g(F_n)$. Výsledky experimentu lze s dostatečnou přesností aproximovat lineární závislostí $F_T = \text{konst} \cdot F_n$ vyjadřující, že třecí síla F_T (což je tečná složka stykové výslednice za pohybu) je veličina úměrná normální složce F_n .

Zobecnění výsledků a formulace teorie coulombovského smykového tření

Z výsledků experimentu vyplývá:

- Mezi velikostí hnací síly \vec{F} a pohybem tělesa platí tyto relace:
 - je-li $F < F_{To}$ – těleso je v klidu
 - je-li $F = F_{To}$ – začíná pohyb tělesa (přechodová oblast mezi klidem a pohybem)
 - je-li $F = F_{Tv}$ – rovnoměrný pohyb tělesa $v = \text{konst}$
 - je-li $F > F_{Tv}$ – nerovnoměrný pohyb tělesa $v \neq \text{konst}$
- Orientace síly \vec{F} a pohybu tělesa \vec{v} jsou vždy shodné. Orientace třecí síly \vec{F}_T a pohybu tělesa \vec{v} jsou vždy opačné.
- Práce hnací síly \vec{F} se mění nevratně na teplo, což se projeví ohřevem okolí styku.
- Přechod z klidu do pohybu je nestabilní. Jakmile pohyb nastane, velikost hnací síly náhle klesá z počáteční hodnoty $F = F_{To}$ a ustavuje se na hodnotě $F = F_{Tv}$. Tuto skutečnost známe z praxe, jen si ji ne vždy dostatečně uvědomujeme.

Po analýze výsledků experimentu lze usoudit, že rovněž v každém elementu stykového útvaru Γ_s hranolu a podložky (posuvná vazba) je při relativním smýkání velikost elementární třecí síly závislá na velikosti elementární normální složky $dF_T = \text{konst} \cdot dF_n = f dF_n$. Veličina f , označovaná jako součinitel smykového tření (pro $v = 0_+$ je to součinitel adheze f_o a pro $v \neq 0$ součinitel smykového tření f_v , přičemž $f_o > f_v$) v sobě zahrnuje implicitně ty podstatné vlastnosti a podmínky styku v daném elementu Γ_s , které nejsou zahrnuty v modelu geometrie styku (uvažujícím rovinné a geometricky dokonalé povrchy). Třecí síla je vždy orientována proti pohybu t.j. $\vec{e}_{F_T} = -\vec{e}_v$. Předchozí vztahy, formulované pro elementární síly (lokální veličiny), jsou obecně platné pro všechny případy vzájemného smýkání i ve vazbách jiné geometrie Γ_s (k.d. obecná, k.d. rotační, pásové tření atd.), zatímco charakter závislostí mezi složkami stykových výslednic (globální veličiny) je geometrií Γ_s ovlivněn (viz. jednotlivé k.d. dále uvedené).

Závěry:

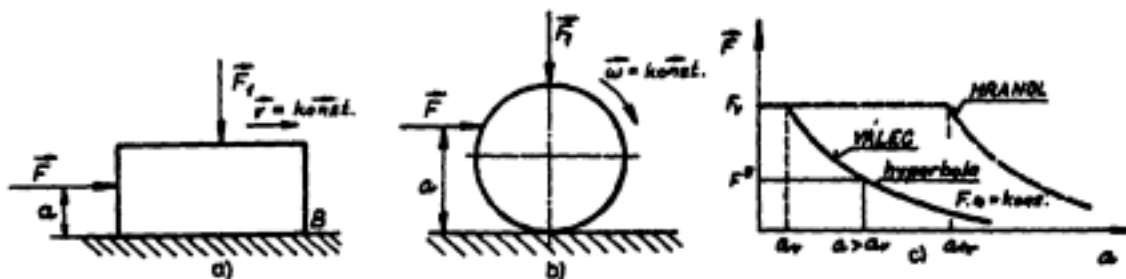
- Hranol i podložka mají v kontaktu mikroskopicky drsný povrch. Makroskopicky je stykový útvar Γ_s rovinný s velkou stykovou plochou. Důsledkem toho je malý stykový tlak a nevýznamná makroskopická deformace Γ_s a jeho okolí. Podstatou pasivního odporu při smýkání hranolu je proto deformace a porušování mikronerovností v Γ_s .
- Coulombovské smykové tření je definováno pouze za pohybu, za klidu působí v kontaktu tečná složka stykové síly, která je nezávislá na složce normální a je určována ze statických podmínek.

c) Coulombovské smykové tření je definováno pro elementární síly. Jsou to lokální veličiny, podmínky ve styku (charakterizované velikostí lokálního součinitele smyk. tření f) se mohou místo od místa měnit. Vztah $F_T = f F_n$ není definičním vztahem pro coulombovské smykové tření a je použitelný pouze pro některé typy vazeb (obecná, posuvná). V tomto vztahu veličina f představuje globálního součinitele smykového tření a vyjadřuje střední hodnotu součinitele v Γ_s . Je zřejmé, že:

- hodnota coulombovského součinitele smykového tření f [-] významně závisí na materiálech těles, drsnosti kontaktních ploch, přítomnosti cizích látek v kontaktu, mazání a teplotě v Γ_s
- hodnota coulombovského součinitele smykového tření f nezávisí na velikosti přítláčné síly a na velikosti plochy Γ_s . Proto ani velikost třecí síly nezávisí na velikosti plochy Γ_s .
- hodnoty součinitele smykového tření se pohybují v řádech 10^{-2} až 10^{-1} (orientačně z technických příruček např. pro ocel-led 0,02, ocel-bronz 0,1, ocel-ocel 0,15, ocel-osinek 0,3, ocel-pryž 0,7, pryž-asfalt 0,8)
- při výpočtovém řešení je nutno vždy uvážit možnost odchylek hodnoty součinitele smykového tření od tabulkových hodnot uváděných v technické literatuře

d) Podmínku $\vec{e}_{F_T} = -\vec{e}_v$ je nutno při řešení vždy respektovat. Proto při uvolnění těles je nutno vždy správně vyznačit směr relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách.

Průběh a vyhodnocení experimentu s válcem:



Obr. 10.3:

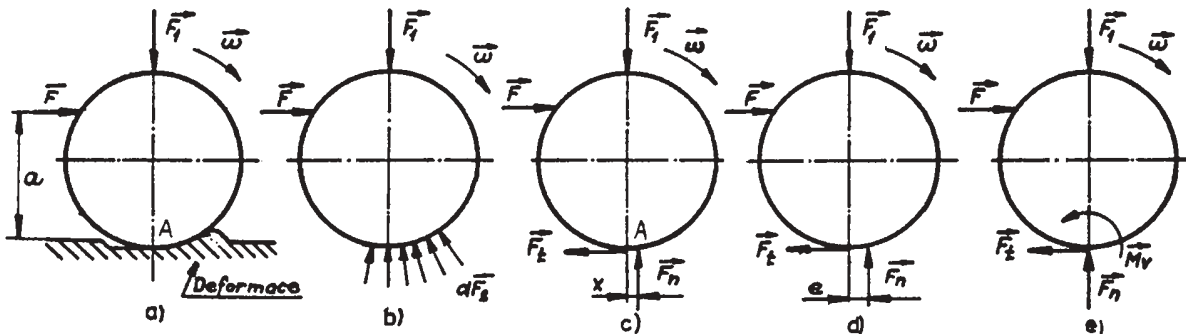
1. Podobně jako u hranolu vyšetřujeme v první části experimentu (uspořádání viz. obr. 10.14b) při $F_1 = \text{konst}$ (přítláčná síla) a $a = \text{konst}$ vliv velikosti hnací síly F na pohybový stav tělesa (viz. obr. 10.14c). Zvětšujeme (dostatečně pomalu) velikost $F = \text{var}$ (akční veličina), sledujeme charakter pohybu válce a měříme jeho parametry. Pohybový stav je v tomto případě závislý nejen na velikosti akční síly F , ale i na vzdálenosti její nositelky od místa kontaktu. Je-li vzdálenost $a < a_v$ pak nastává po překonání hranice klidové stability smýkání válce po podložce rychlostí $v = v_A \neq 0$, při $a \geq a_v$ nastává valení $v \neq 0$ (při něm relativní rychlost v místě kontaktu A je $v_A = 0$). Bod A je výpočtovým modelem Γ_s z hlediska geometrie obecné vazby. Mezní hodnotu $a = a_v$ budeme vyšetřovat ve druhé části experimentu. Výsledky první části experimentu jsou znázorněny v obrázku obr. 10.14c. Z jejich analýzy lze vyvodit následující závěry:

a) Klidový stav válce:

- při $a < a_v$ a $F < F_{mez} = F_{T,o}$ válec setrvává v klidu, nebyla překonána hranice klidové stability a $v = 0$. Stejně jako u hranolu jsou velikosti sil F a F_1 za klidu na sobě nezávislé a po dosažení do podmínek SR je zřejmé, že rovněž velikosti normální a tečné složky stykové výslednice na sobě nezávislejší $F_t \neq g(F_n)$.
- při $a \geq a_v$ válec setrvává v klidu při $F < F_{mez}$, přičemž mezní hodnota síly F_{mez} , odpovídající překonání hranice klidové stability pro valení, je menší než v předchozím případě smýkání, t.j. $F_{mez} < F_{T,o}$. Velikosti sil F a F_1 za klidu jsou opět na sobě nezávislé a po dosažení do podmínek SR válce rovněž velikosti normální a tečné složky stykové výslednice na sobě nezávislejší $F_t \neq g(F_n)$.

b) Pohyb válce po překonání hranice klidové stability:

- při $a < a_v$ a dosažení $F = F_{T,o}$ byla právě překonána hranice klidu a pohybu a nastává smýkání válce po podložce rychlostí $v = v_A = 0_+$. Stejně jako u hranolu existuje na hranici klidu a pohybu přechodová oblast, v níž se velikost hnací síly $F = F_{T,v}$, potřebná k udržení rovnoměrného pohybu tělesa rychlostí $v = v_A = \text{konst} \neq 0$, významně mění. Jestliže již nastal rovnoměrný makroskopický pohyb, je velikost hnací síly potřebná k jeho udržení menší než k jeho realizaci $F = F_{T,v} < F_{T,o}$.



Obr. 10.4:

- při $a \geq a_v$ a dosažení $F = F_{mez}$ začíná valení válce $\omega = 0_+$ (tomu odpovídá rychlost obecného bodu válce $v = 0_+$). Přitom nedochází k relativnímu pohybu v kontaktním bodě A, t.j. $v_A = 0$. Přejít z klidu do pohybu je rovnoměrný (na rozdíl od případu smýkání). Při valení dochází k deformaci těles (válce a podložky) v místě styku. V obr. 10.4a je pro názornost naznačena pouze deformace podložky. Mezní velikost síly $F = F_{mez}$ je v tomto případě závislá na poloze její nositelky a . Tato závislost bude vyšetřována v následující části experimentu. Rovnice statické rovnováhy (viz obr. 10.4):

$$F_x: \quad F - F_{At} = 0 \quad \implies F_{At} = F$$

$$F_y: \quad F_{An} - F_1 = 0 \quad \implies F_{An} = F_1$$

$$M_{zA}: \quad -F a + F_{An} x = 0 \quad \implies F_{An} x = F a = \text{konst} \implies x = \text{konst} = e$$

2. Předchozí měření opakujeme pro $a = \text{var}$ abychom zjistili, jak změna polohy nositelky hnací síly ovlivní hranici klidové stability a pohybový stav tělesa. Výsledky experimentu lze znázornit graficky (obr. 10.3c).

- a) Pokud je $a < a_v$, nastává smýkání válce po podložce a stejně jako u hranolu velikost síly $F_{T,o}$ i $F_{T,v}$ nezávisí na poloze nositelky a .
- b) Při $a \geq a_v$ dochází k valení válce po podložce a naměřené výsledky lze aproximovat hyperbolickou závislostí $F \cdot a = \text{konst}$
3. Podobně jako u hranolu nás opět zajímá přechod z klidu do pohybu $v = 0_+$ resp. udržování rovnoměrného pohybu $v = \text{konst}$ při smýkání nebo analogické stavy $\omega = 0_+$ resp. $\omega = \text{konst}$ při valení. V obou případech postupně měníme velikost přitlačné síly $F_1 = \text{var}$ a určujeme velikost F potřebnou k realizaci požadovaného pohybového stavu. Z výsledků měření lze vyvodit následující závěry:
- při $a < a_v$ za pohybu nastává smýkání (stejně jako u hranolu). Mezi složkami silové stykové výslednice existuje již uváděná lineární závislost $F_T = \text{konst} \cdot F_n = f F_n$.
 - při $a \geq a_v$ nastává valení a naměřené výsledky lze aproximovat závislostí $\frac{F \cdot a}{F_1} = \text{konst} = e$. Momentová podmínka SR válce $M_A - M_{vA} = 0$ vyjadřuje rovnováhu mezi hnacím momentem $M_A = F \cdot a$ a pasivním odporem proti pohybu $M_{vA} = F_{An} \cdot e$. Veličina e [mm], která vyjadřuje posunutí nositelky normální složky stykové síly vzhledem k bodu A, je označována jako rameno valivého odporu.

Zobecnění výsledků a formulace teorie tuhého valení

V případě experimentu s válcem měla styková vazba mezi válcem a podložkou charakter podpory. Poznatky, které jsme na základě experimentu získali, zopakujeme, doplníme a utřídíme. Z analýzy průběhu a výsledků experimentu je zřejmé, že na rozdíl od smýkání je při valení přechod z klidu do pohybu stabilní. Velikost momentu valivého odporu \vec{M}_{vA} v podpoře A určíme ze vztahu $M_{vA} = F_{An} e$. Moment valivého odporu je vždy orientován proti pohybu t.j. $\vec{e}_{M_{vA}} = -\vec{e}_\omega$. Veličina e [mm], označovaná jako rameno valivého odporu, v sobě zahrnuje implicitně ty vlastnosti styku, které nebyly uváženy v modelu geometrie stýkajících se těles (uvažujícím geometricky dokonalé povrchy a bodový kontakt). Rameno valivého odporu je obecně závislé na materiálech těles, nerovnostech a na deformaci těles v blízkém okolí jejich styku. Výpočtový model tuhého valení neuvažuje změnu velikosti e se zatížením t.j. $e \neq g(F_n)$. Hodnoty ramene valivého odporu se pohybují řádově v mezích 10^{-2} až 10^1 [mm] a lze je najít v technických příručkách. Některé orientační hodnoty e [mm] uváděné v literatuře: kalená ocel - kalená ocel 0,01 – 0,1, ocel - ocel 0,5, ocel - dřevo 0,7 – 0,9, dřevo - dřevo 0,5 – 1,5, pneu auto - vozovka 3 – 10 (podle typu vzorku), pneu bicykl - vozovka 2 – 5 (podle typu vzorku) atd. Při výpočtovém řešení je nutno vždy uvážit možnost odchylek od tabulkových hodnot uváděných v technické literatuře.

Závěr:

- a) Válec i podložka mají v kontaktu mikroskopicky drsný povrch, stykový útvar Γ_s o malé stykové ploše můžeme z makroskopického hlediska považovat za bodový. Důsledkem toho je velký stykový tlak a významná makroskopická deformace Γ_s a jeho okolí.
- b) Podstatou pasivního odporu při smýkání válce, popsaného třecí silou $F_T = F_n f$, je především deformace a porušování mikronerovností. Udržování pohybu je podmíněno dodáváním mechanické energie, která se nevratně mění v teplo.
- c) Podstatou pasivního odporu při valení válce, popsaného momentem valivého odporu $M_v = F_n e$, je především makroskopická deformace podložky a válce v Γ_s a jeho okolí.

Jestliže dochází k valení, musíme tělesu dodávat mechanickou energii, která se v místě styku mění nevratně na teplo a zbytkovou energii napjatosti akumulovanou v tělesech.

d) Mezi velikostí momentu hnací síly $M_A = F a$ k bodu dotyku A a pohybem tělesa při valení platí tyto relace:

- je-li $F a < F_1 e$ (při $F < F_1 f_o$) – těleso je v klidu $\omega = 0$
- je-li $F a = F_1 e$ (při $F < F_1 f_o$) – začíná valení tělesa $\omega = 0_+$
- je-li $F a = F_1 e$ (při $F < F_1 f_v$) – rovnoměrné valení tělesa $\omega = \text{konst}$
- je-li $F a < F_1 e$ (při $F < F_1 f_v$) – nerovnoměrné valení tělesa $\omega \neq \text{konst}$

e) Pasivní účinky jsou vždy orientovány proti pohybu tělesa.

10.1.2 Obecné závěry vyplývající z experimentů a z praxe

V historii mechaniky byly popsány experimenty mnohokrát opakovány a o pravdivosti tvrzení z nich vyvozených se lze přesvědčit improvizovanými pokusy a pozorováním jevů probíhajících kolem nás. Prokázaly, že je-li silové působení ve směru geometricky možného pohybu z hlediska řešeného problému podstatné, pak pro popis silových podmínek ve styku, které jsou významně závislé na charakteru pohybu, musíme použít model NNTP.

V úvodní kapitole byly podstatné vlastnosti stykových vazeb NNTP formulovány do axiomu o styku těles, vyjadřujícího, že relativní pohyb v každém bodě Γ_s zatíženého styku těles:

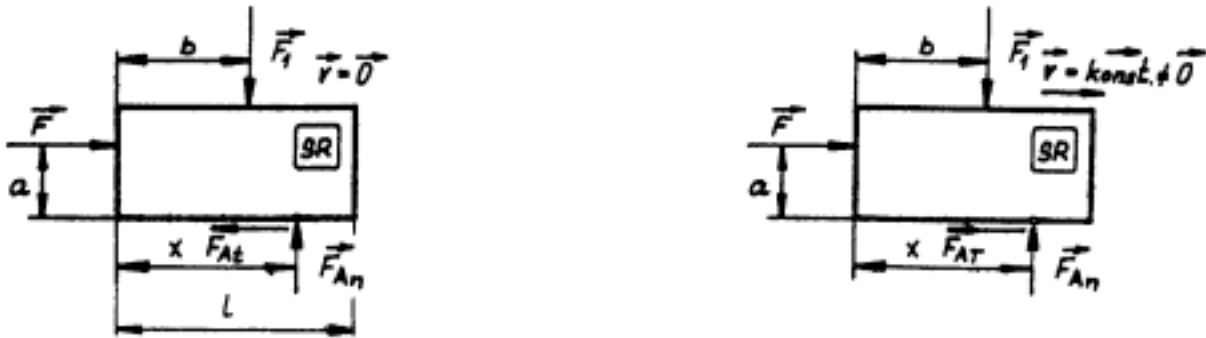
- a) je omezen ve směru normály v důsledku neprostupnosti těles
- b) jeho ovlivňování v tečném směru závisí na podmínkách ve styku
- c) jeho udržení vyžaduje dodávání mechanické práce, která se nevratně mění v teplo.

10.2 Aplikace teorie coulombovského smykového tření a tuhého valení

Základní vztahy silového působení pro nejjednodušší modely NNTP styku t.j. coulombovské tření a tuhé valení jsme vymezili v předchozím odstavci. Dále se budeme zabývat uvolněním základních stykových vazeb s uvážením uvedených modelů styku. Vzhledem k tomu, že silové působení v těchto případech významně závisí na charakteru pohybu, musíme při uvolňování vazeb uvažovat konstrukční provedení vazby a uložení tělesa, které jsou z hlediska pohybu podstatné.

10.2.1 Posuvná vazba

Vazba mezi hranolem a podložkou u experimentu měla charakter jednostranné posuvné vazby. V případě jednostranné posuvné vazby může z pohybového hlediska nastat klid nebo smýkání nebo může dojít ke změně charakteru vazby (na obecnou při překlápění hranolu), případně i ke zrušení kontaktu. Funkční posuvná vazba odnímá tělesu dva stupně volnosti. Dále jsou uvedena



Obr. 10.5: Uvolnění posuvné vazby

uvolnění tělesa vázaného posuvnou vazbou (obr. 10.5) a odpovídající vztahy a závislosti pro pohybové stavy klidu $v = 0$ a smýkání konstantní rychlostí $v = \text{konst.}$

Pohybový stav

klid

smýkání

Počet odebíraných stupňů volnosti

$$\zeta = 2$$

Množina NP

$$\text{NP} = \{F_{At}, F_{An}, x\}$$

$$\text{NP} = \{F_{An}, x\}$$

$$\mu = 3$$

$$\mu = 2$$

Styková závislost

neexistuje

$$F_{AT} = f F_{An}$$

Podmínky realizace pohybového stavu

$$F = F_{At} < f F_{An}$$

$$x < l$$

 F_{An} tlaková

$$F = F_{AT} = f F_{An}$$

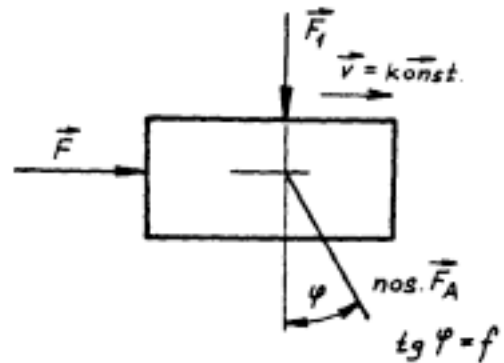
$$x < l$$

 F_{An} tlaková

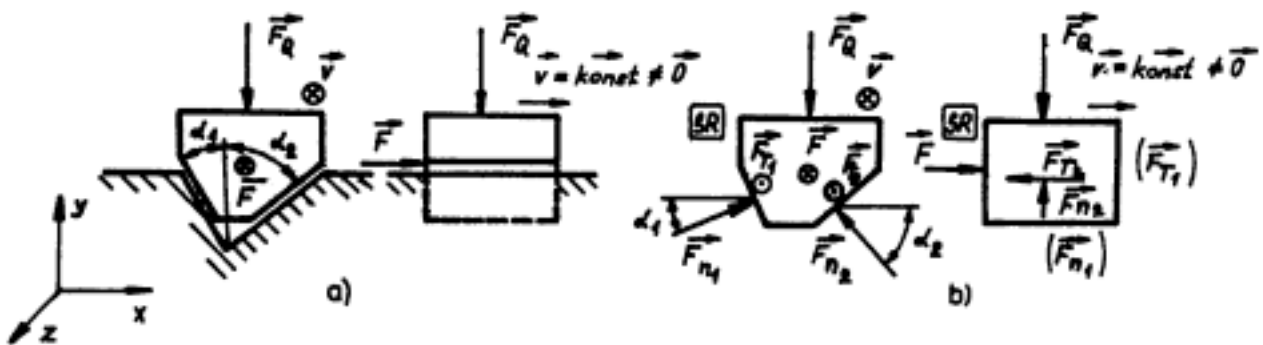
Nositelka výsledné stykové síly svírá s normálou ke stykové ploše úhel φ tak, že její tečná složka působí proti pohybu. To platí i pro každou elementární sílu v elementu stykové plochy. Třecí úhel určíme ze vztahu $\varphi = \arctan \frac{F_{AT}}{F_{An}} = \arctan f$, viz obr. 10.6.

10.2.2 Těleso uložené v klínové drážce

Zabývejme se případem, kdy je těleso se základním tělesem vázano posuvně, přičemž stykovou plochu tvoří klínová drážka (vedení stolů obráběcích strojů atd.) viz. obr. 10.7a. Cílem je odvození vztahu pro potřebnou velikost hnací síly \vec{F} působící na dané nositelce, má-li se těleso v drážce posouvat konstantní rychlostí $v = \text{konst.}$ Uvažme stejnou hodnotu součinitele smykového tření v obou podoblastech styku $f = \text{konst.}$ Geometrická konfigurace a zatížení jsou zřejmé z obrázku. Podmínky statické rovnováhy uvolněného tělesa (viz obr. 10.7b):



Obr. 10.6:



Obr. 10.7:

$$\begin{aligned} F_x: & F_{n1} \cos \alpha_1 - F_{n2} \cos \alpha_2 = 0 \\ F_y: & F_{n1} \sin \alpha_1 + F_{n2} \sin \alpha_2 - F_Q = 0 \\ F_z: & -F + (F_{n1} + F_{n2})f = 0 \end{aligned}$$

Vhodnými algebraickými úpravami obdržíme z první a druhé rovnice rovnováhy obdržíme

$$F_{n1} = F_Q \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad F_{n2} = F_Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

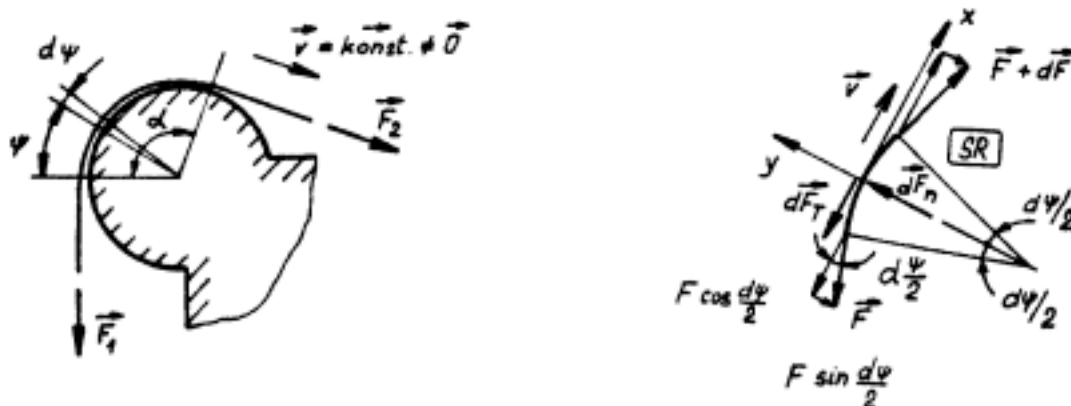
Po dosazení do silové podmínky rovnováhy ve směru osy z dostáváme:

$$F = F_Q f \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Tento vztah lze formálně upravit na tvar $F = F_Q f_T$, kde veličina $f_T = f \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$ je označována jako součinitel tření v klínové drážce. Je zřejmé, že veličina f_T je závislá na součiniteli smykového tření f a geometrii drážky.

10.2.3 Pásové tření

Při pohybu lan, řemenů, ocelových pásů po zakřiveném povrchu těles dochází ve stykových plochách ke smýkání, které označujeme jako pásové nebo vláknové tření (viz. smýkání lana po pevné kladce, pásové brzdy atd.). Vztah pro vláknové tření odvodíme pro dokonale ohebné, neprodužitelné vlákno pohybující se po vypouklé ploše tělesa konstantní rychlostí. Tíha vlákna vzhledem k ostatním silám je nepodstatná. Hodnotu součinitele smykového tření v celém kontaktu předpokládáme konstantní. Při popsání rovnoměrného pohybu vlákna je každý jeho element ve statické rovnováze. Vztah pro vláknové tření odvodíme z podmínek statické rovnováhy uvolněného elementu viz obrázky obr. 10.8.



Obr. 10.8:

$$F_x: \quad (F + dF) \cos \frac{d\psi}{2} - F \cos \frac{d\psi}{2} - dF_T = 0$$

$$F_y: \quad dF_n - (F + dF) \sin \frac{d\psi}{2} - F \sin \frac{d\psi}{2} = 0$$

$$dF_T = f dF_n$$

Po dosazení $\cos \frac{d\psi}{2} \doteq 1$, $\sin \frac{d\psi}{2} \doteq \frac{d\psi}{2}$, algebraických úpravách a vyloučení diferenciálních veličin vyšších řádů obdržíme:

$$\left. \begin{array}{l} dF - f dF_n = 0 \\ dF_n - F d\psi = 0 \end{array} \right\} dF - f F d\psi = 0 \quad \frac{dF}{F} = f d\psi \Big|_1^2$$

$$\ln \frac{F_2}{F_1} = f \alpha$$

Podmínkou rovnoměrného pohybu pásu je

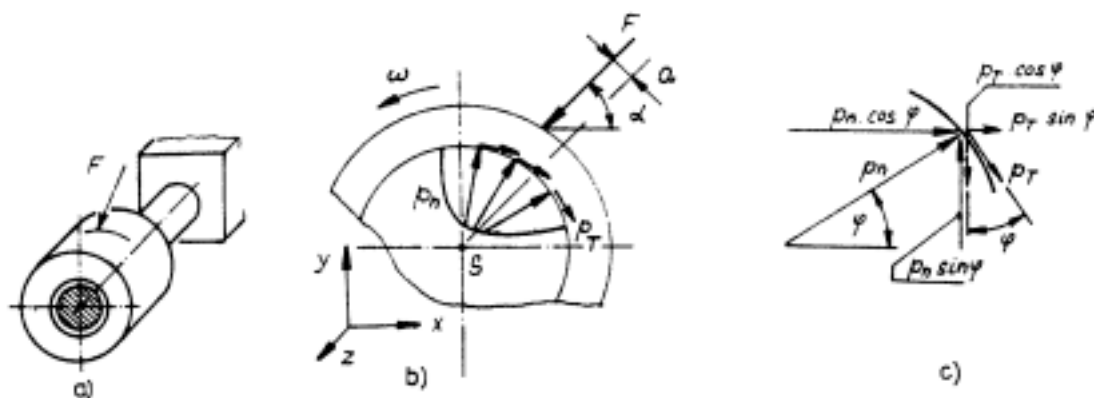
$$F_2 = F_1 e^{\alpha f}$$

Je zřejmé, že poměr sil F_2/F_1 je závislý pouze na hodnotě součinitele smykového tření f a na úhlu opásání α . Pro $F_2/F_1 < e^{\alpha f}$ relativní pohyb v kontaktu nenastane, při $F_2/F_1 > e^{\alpha f}$ není pohyb pásu rovnoměrný.

10.2.4 Radiální čepy – rotační vazba

Základní poznatky o výsledném silovém působení v posuvné vazbě a v podpoře jsme získali vyhodnocením a zobecněním výsledků experimentu, provedeného na úrovni výsledného silového působení. Modelovými stykovými útvary Γ_s těchto vazeb jsou oblast rovinná resp. bod, realitu smýkání v těchto vazbách lze s dostatečnou přesností popsat s použitím modelu coulombovského smykového tření. Efektivní uvolnění těchto vazeb je prováděno pro výsledné silové působení.

Modelovým stykovým útvarem rotační vazby je část válcové plochy, ve které za pohybu dochází mezi tělesy ke smýkání. Podstata smýkání je stejná jako u předchozích vazeb, na úrovni coulombovského smykového tření jsme ji popsali při zobecnění výsledků experimentu. Tento výpočtový model je však použitelný pouze pro řešení případů, kdy dochází ke vzájemnému kontaktu těles v Γ_s a kdy čep neplave na olejovém filmu (k tomu dochází na začátku rozběhu hřídele, model nelze použít pro kluzná ložiska mazaná tlakovým olejem). Coulombovské smykové tření použijeme pro řešení silových poměrů v rotační vazbě. Uvolnění objímky je



Obr. 10.9:

znázorněno na obr. 10.9b. Za předpokladu, že se objímka otáčí konstantní úhlovou rychlostí $\omega = \text{konst}$, jsme oprávněni pro řešení silových poměrů použít podmínek statické rovnováhy.

$$F_x: \quad -F \cos \alpha + \int_{\Gamma_s} (p_n \cos \varphi + p_T \sin \varphi) dS = 0$$

$$F_y: \quad F \sin \alpha + \int_{\Gamma_s} (p_n \sin \varphi - p_T \cos \varphi) dS = 0$$

$$M_{zS}: \quad F a - \int_{\Gamma_s} r_{\zeta} p_T dS = 0$$

$$\text{přičemž} \quad p_T = f p_n; \quad M_{\zeta} = \int_{\Gamma_s} r_{\zeta} p_T dS = \int_{\Gamma_s} r_{\zeta} f p_n dS$$

Veličinu M_{ζ} , která vyjadřuje výsledný pasivní účinek působící proti pohybu v rotační vazbě, nazýváme momentem čepového tření radiálního čepu.

Rotační vazba patří k nejběžnějším a nejvýznamnějším vazbám ve strojírenství. Vztah pro určení momentu čepového tření je jednoduchý, jeho řešení však předpokládá znalost stykové oblasti Γ_s a v ní rozložení normálního tlaku $p_n(\varphi)$. Rozložení normálního tlaku a geometrii stykové oblasti lze určit řešením kontaktního problému, který patří k složitým úlohám mechaniky těles, přesahujícím rámec základního studia. Pro určení momentu čepového tření (v rotační vazbě A, viz obr. 10.10) za podmínek odpovídajících modelu coulombovského smykového tření se používá vztah

$$M_{\zeta A} = F_{AT} r_{\zeta} = r_{\zeta} F_A \sin \varphi_{\zeta} = r_{\zeta} f_{\zeta} F_A = r_{\zeta} f_{\zeta} \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

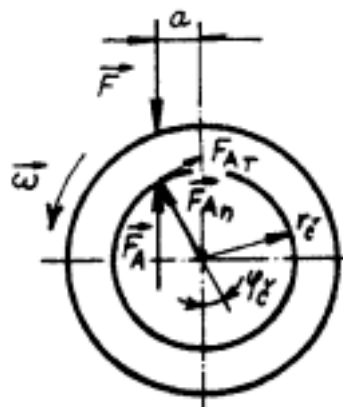
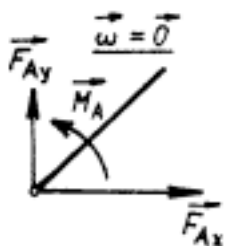
Označení veličin:

$M_{\zeta A}$ je moment čepového tření radiálního čepu A

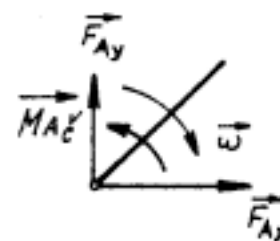
f_{ζ} je součinitel čepového tření radiálního čepu, který závisí na součiniteli tření f a rozložení tlaku $p_n(\varphi)$. Hodnota součinitele f_{ζ} je zpravidla určována experimentálně

F_{Ax} , F_{Ay} jsou souřadnice silové stykové výslednice určované z podmínek statické rovnováhy

Tělesa vázaná rotační vazbou při uvažování styku NNTP mohou být v relativním klidu $\omega = 0$ nebo pohybu $\omega \neq 0$. Dále uvedeme uvolnění pro oba možné pohybové stavy (viz. obr. 10.11).



Obr. 10.10:



Obr. 10.11: Uvolnění rotační vazby

Pohybový stav

klid

smýkání

Počet odebíraných stupňů volnosti

$$\zeta = 2$$

Množina NP

$$NP = \{F_{Ax}, F_{Ay}, M_A\}$$

$$\mu = 3$$

$$NP = \{F_{Ax}, F_{Ay}\}$$

$$\mu = 2$$

Styková závislost

neexistuje

$$M_{\zeta A} = r_{\zeta} f_{\zeta} \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

10.2.5 Axiální čepy

Předpokládejme, že pro popis smýkání ve stykové ploše axiálního čepu (obr. 10.12) je možno použít model coulombovského smykového tření (dochází ke vzájemnému kontaktu těles v Γ_s a čep neplave na olejovém filmu) $dF_T = f dF_n$ a $\vec{e}_{F_T} = -\vec{e}_v$. Výsledný pasivní účinek je závislý na rozložení tlaku $p_n(r)$ ve stykové ploše. Vzhledem k obtížnosti určení rozložení stykového tlaku (kontaktní problém) se ve strojírenství pro modelování jeho rozložení běžně používají dále uvedené vztahy, určené na experimentálním základě a provozních zkušenostech:

$$p_n = \text{konst} \quad \text{u nezaběhaných čepů}$$

$$p_n \cdot r = \text{konst} \quad \text{u zaběhaných čepů}$$

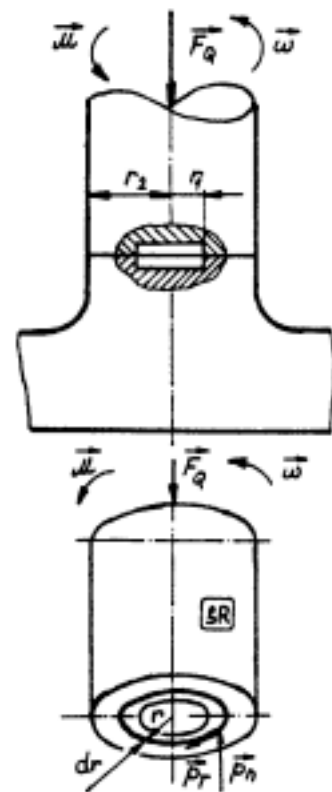
a) Nezaběhaný čep:

$$p_n = \frac{F_Q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \text{konst}$$

$$dS = 2\pi r dr, \quad dF_n = 2\pi r dr p_n$$

$$dM_{\zeta} = dF_T r = f dF_n r = \frac{2r^2 dr F_Q f}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$M_{\zeta} = \int_{r_1}^{r_2} dM_{\zeta} = \frac{2F_Q f}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{2}{3} F_Q f \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}$$



Obr. 10.12:

b) Zaběhaný čep:

$$p_n r = \text{konst} = K$$

$$F_Q = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr p_n = 2\pi K (r_2 - r_1)$$

$$\text{odtud } K = p_n r = \frac{F_Q}{2\pi (r_2 - r_1)}$$

$$dM_{\xi} = dF_T r = f r dF_n = f r p_n 2\pi r dr = f r 2\pi K dr$$

$$M_{\xi} = \int_{r_1}^{r_2} dM_{\xi} = \frac{F_Q f}{2(r_2 - r_1)} (r_2^2 - r_1^2) = F_Q f \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Z předchozích vztahů je zřejmé, že pasivní odpor, charakterizovaný momentem čepového tření M_{ξ} , je závislý na součiniteli smykového tření f , na rozložení stykového tlaku p_n a na geometrii čepu (čep s vybráním nebo bez něj). Odvozené vztahy lze zobecnit do tvaru

$$M_{\xi} = F_Q f_{\xi} r_{\xi}$$

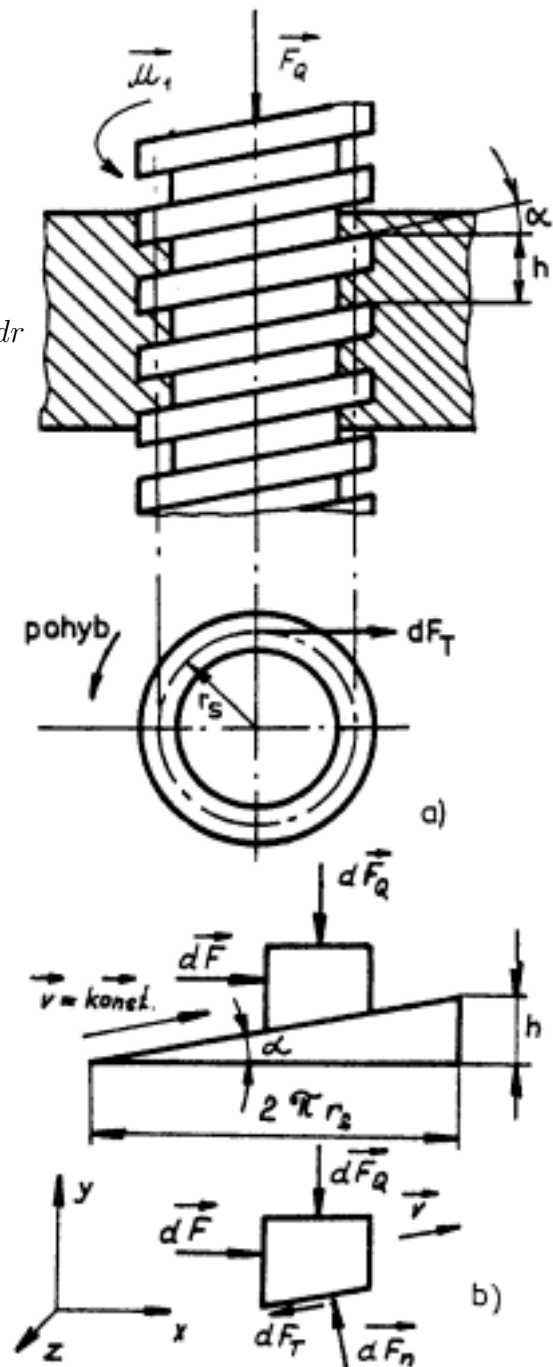
v němž veličina f_{ξ} , která závisí na součiniteli smykového tření a rozložení stykového tlaku $p_n(r)$, je označována jako součinitel čepového tření axiálního čepu a veličina r_{ξ} závisí na geometrii čepu.

10.2.6 Šroubová vazba

Cílem výpočtového řešení je určení potřebné velikosti momentu silové dvojice, která vyvolá otáčení šroubu uloženého v nepohyblivé matici a zatíženého osovou silou \vec{F} , konstantní úhlovou rychlostí. Výsledný pasivní účinek je závislý na konkrétním provedení profilu závitu, kterým je ovlivněna geometrie styku a rozložení stykového tlaku. Ilustrativní ukázkou odvození provedeme pro trapezový profil závitu za předpokladu rovnoměrného rozložení tlaku ve stykové ploše. Uvolnění styku elementu šroubu (při zvedání) je znázorněno na obrázku obr. 10.13. Podmínky statické rovnováhy elementu v souřadnicovém tvaru:

$$F_x: \quad dF - dF_T \cos \alpha - dF_n \sin \alpha = 0$$

$$F_y: \quad -dF_Q + dF_n \cos \alpha - dF_T \sin \alpha = 0$$



Obr. 10.13:

Po dosazení za $dF_T = f dF_n$ a jednoduché algebraické úpravě obdržíme:

$$\begin{aligned} dF &= dF_Q \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = dF_Q \frac{f + \tan \alpha}{1 - f \tan \alpha} = \\ &= dF_Q \frac{\tan \varphi + \tan \alpha}{1 - \tan \varphi \tan \alpha} = dF_Q \tan(\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

Analogicky při spouštění

$$dF = dF_Q \tan(\alpha - \varphi)$$

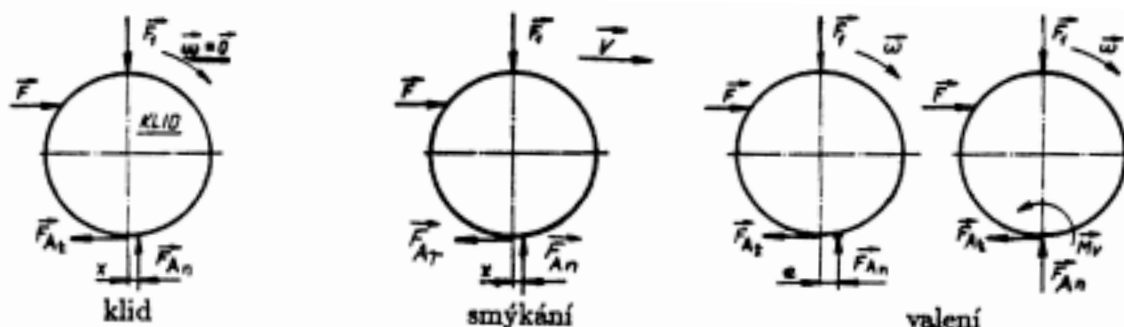
Potřebnou velikost hnacího momentu pro rovnoměrné zvedání (index 1) resp. pro rovnoměrné spouštění (index 2) určíme ze vztahu

$$\mathcal{M}_{1,2} = \int_0^{F_Q} r_s \tan(\alpha \pm \varphi) dF_Q = r_s F_Q \tan(\alpha \pm \varphi)$$

Ze vztahu vyplývá, že je-li $\alpha < \varphi$, pak $\tan(\alpha - \varphi) < 0$ a $\mathcal{M}_2 < 0$. Při spouštění tedy musí působit hnací silová dvojice \mathcal{M}_2 orientovaná ve směru požadované rotace šroubu. Pokud je $\mathcal{M}_2 = 0$ pak pohyb nenastává t.j. nedochází k samovolnému spouštění. V těchto případech šroubovou vazbu označujeme jako samosvornou.

10.2.7 Obecná vazba – podpora

Je-li těleso vázáno k jinému tělesu vazbou typu podpora, pak v podpoře může nastat klid, smýkání, valení nebo ztráta kontaktu (podmíněná funkčnost podpory). Skutečný pohybový stav tělesa závisí na jeho uložení (charakterizovaném množinou všech jeho stykových vazeb s okolím) a na silovém působení na ně. Jestliže v podpoře nastává smýkání, pak vazba odnímá tělesu jeden stupeň volnosti, v případě valení dva, protože otáčení tělesa kolem osy z a jeho posuv ve směru osy x jsou vzájemně lineárně závislé. Tato závislost je popsána vztahem $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Uvolnění tělesa pro jednotlivé pohybové stavy (viz. obr. 10.14) a statické výpočtové řešení provedeme za předpokladu, že buď je těleso v klidu ($v = 0$ a $\omega = 0$), nebo se pohybuje konstantní rychlostí ($v = \text{konst}$ a $\omega = 0$ resp. $v = 0$ a $\omega = \text{konst}$ při smýkání, nebo $\omega = \text{konst}$ a $v = \omega r$ při valení).



Obr. 10.14: Uvolnění obecné vazby

Pohybový stav

klid

smýkání

valení

Počet odebíraných stupňů volnosti

$$\zeta = 1$$

$$\zeta = 2$$

Množina NP

$$\text{NP} = \{F_{At}, F_{An}, x\}$$

$$\mu = 3$$

$$\text{NP} = \{F_{An}, x\}$$

$$\mu = 2$$

$$\text{NP} = \{F_{An}, F_{At}\}$$

$$\mu = 2$$

Styková závislost

neexistuje

$$F_{AT} = f F_{An}$$

$$M_{vA} = F_{An} e$$

Podmínky realizace pohybového stavu

$$F < F_{AT} = F_{An} f$$

$$F a < F_{An} e = M_{vA}$$

$$F_{An} \text{ tlaková}$$

$$x < e$$

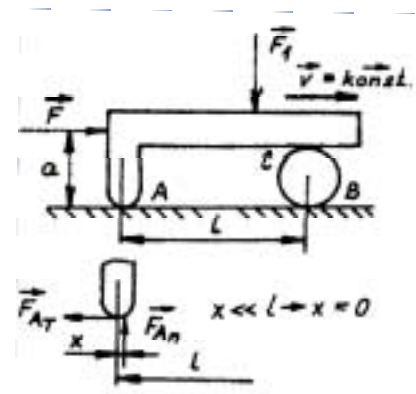
$$F_{An} \text{ tlaková}$$

$$F_{At} < F_{AT} = F_{An} f$$

$$F_{An} \text{ tlaková}$$

Při uvolňování vazby na začátku výpočtového řešení ještě nevíme, jaký pohybový stav ve vazbě reálně nastane. Je-li z hlediska uložení tělesa možné valení, pak je předpokládáme. Při běžných podmínkách ve styku je valení pravděpodobnější než smýkání. Po určení neznámých parametrů musíme vždy zkontrolovat splnění podmínky předpokládaného pohybového stavu – v tomto případě valení. Podmínka valení má tvar $F_{At} < F_{AT} = f F_{An}$. V případě, že podmínka není splněna, musíme řešení opakovat s předpokladem smýkání. V přírodě jde výběr reálného pohybového stavu cestou minima mechanické energie potřebné k realizaci pohybu. Reálně nastane ten z geometricky možných pohybových stavů, který pro svoji realizaci potřebuje méně mechanické práce.

Je-li v podpoře možné pouze smýkání (viz obr. 10.15 v podpoře A), pak vyosení x nositelky normální síly je u většiny případů z hlediska řešeného problému nepodstatné a lze je zanedbat.



Obr. 10.15:

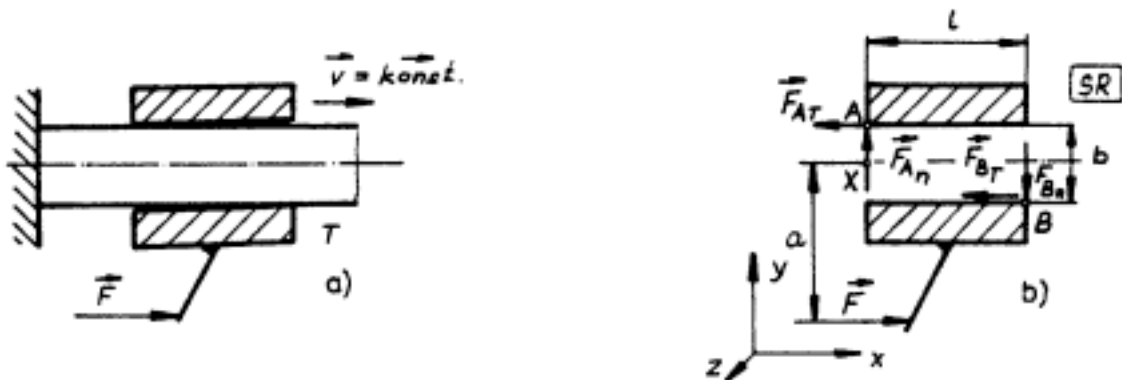
10.3 Statická rovnováha pohyblivě uloženého tělesa

Při pohyblivém uložení má těleso $i = i_v - (\sum \zeta_i - \eta) > 0$ stupňů volnosti. Základní statickou úlohou je řešení SR tělesa pro případy kdy:

- nebyla dosažena hranice klidové stability a těleso setrvává v klidu ($v = 0, \omega = 0$)
- po překročení hranice klidové stability právě nastal pohyb ($v = 0_+, \omega = 0_+$)
- má být udržován rovnoměrný pohyb ($v = \text{konst}, \omega = \text{konst}$)

Analyzujeme možné případy pohyblivého uložení tělesa $i > 0$ (pro jednoduchost se zaměříme na rovinné úlohy):

- a) Rotační vazba ($\text{kdr} - \zeta = 2 \rightarrow i = 1$) – tento případ byl řešen při výkladu rotační vazby.
- b) Posuvná vazba ($\text{kdp} - \zeta = 2 \rightarrow i = 1$)
 - Jednostranná (podmíněně funkční) – tento případ byl řešen při výkladu posuvné vazby.
 - Oboustranná (vždy funkční) – praktickým případem této vazby je smykadlo (obr. 10.16a), používané běžně v praktických strojírenských aplikacích.



Obr. 10.16:

Cílem statického řešení je určení potřebné velikosti hnací síly \vec{F} působící na dané nositelce ve směru požadovaného pohybu, aby bylo dosaženo rovnoměrné posouvání tělesa rychlostí $v = \text{konst}$, analýza možných pohybových stavů tělesa a jejich reálnosti. Velikost hnací síly určíme z podmínek statické rovnováhy za předpokladu $f_A = f_B = f$. Z uvolnění tělesa (obr. 10.16b) :

$$F_{A_T} = f F_{A_n}, \quad F_{B_T} = f F_{B_n}$$

$$F_x: \quad F - F_{A_T} - F_{B_T} = 0 \longrightarrow F = f (F_{A_n} + F_{B_n})$$

$$F_y: \quad F_{A_n} - F_{B_n} = 0 \longrightarrow F_{A_n} = F_{B_n}, \quad F = 2f F_{B_n}$$

$$M_{zX}: \quad F_{A_T} \frac{b}{2} - F_{B_T} \frac{b}{2} - F_{B_n} l + F a = 0$$

Po jednoduché algebraické úpravě obržíme:

$$F_{Bn} l = F a, \quad F \frac{l}{2f} = F a$$

Je-li:

$$a = \frac{l}{2f} \quad - \quad \text{těleso T se pohybuje rychlostí } v = \text{konst}$$

$$a < \frac{l}{2f} \quad - \quad \text{těleso T se pohybuje rychlostí } v \neq \text{konst}$$

$$a > \frac{l}{2f} \quad - \quad \text{těleso T je v klidu } v = 0$$

a to při libovolné velikosti síly \vec{F} .

Posledně uvedený stav, kdy pro $a > \frac{l}{2f}$ je těleso v klidu při libovolné velikosti síly \vec{F} , je označován jako vzpříčení tělesa. Běžně je stav vzpříčení při provozu mechanismů nežádoucí, existují však případy pozitivního využití tohoto jevu (např. stolařská ztužidla nebo stoupací železa na sloupy el. vedení).

- c) Obecná vazba typu podpora (kdo – v případě valení $\zeta = 2 \rightarrow i = 1$, v případě smýkání $\zeta = 1 \rightarrow i = 2$). Oba případy byly řešeny při výkladu obecné vazby.
- d) Dvě podpory ($\zeta = 2, i = 1$). Pokud jsou obě podpory zatížené (t.j. funkční) je v obou možné pouze smýkání (viz obr. 10.15 u výkladu obecné vazby) a vyosení nositelky normální síly je u většiny případů z hlediska řešeného problému nepodstatné. Pokud je funkční jen jedna z podpor, je pravděpodobné překlápění tělesa kolem ní t.j. valení. Při výpočtovém řešení je nutno vždy provést kontrolu stykových podmínek v jednotlivých podporách a rozhodnout o reálnosti předpokládaného pohybového stavu tělesa. Při pokusu o řešení SR tělesa, uloženého pohyblivě na dvou podporách, za klidu t.j. pro $v = 0$ zjistíme, že v tomto případě není splněna nutná podmínka statické určitosti úlohy vyžadující aby $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$. Tento poznatek lze zobecnit a konstatovat: za klidu vede řešení SR tělesa, vázaného více než jednou stykovou vazbou, vždy na staticky neurčitou úlohu.

10.4 Statická rovnováha soustav těles s pasivními vazbami

Je zřejmé, že k ovlivňování pohybu pasivními odpory může dojít pouze u pohyblivých soustav (t.j. u mechanismů, diferenciálů ...). Uvažování pasivních odporů při statickém řešení nepohyblivých soustav těles (např. prutových soustav) nemá smysl. Na začátku statického řešení je tedy nutno vždy analyzovat pohyblivost soustavy (provést kinematický rozbor).

Při výpočtovém řešení SR soustav těles s vazbami s pasivními odpory lze rozlišit tři základní typy úloh:

1. Nenastal pohyb a při působení vnějších silových účinků setrvává pohyblivá soustava těles v klidu. Nebyla dosud překonána hranice klidové stability a úloha řešení SR soustavy za klidu je staticky neurčitá.
2. Nastává pohyb všech pohyblivě uložených těles v soustavě a pohybový stav všech těles je jednoznačně určen (uložení neobsahuje obecnou vazbu s možností valení nebo smýkání).

Cílem výpočtového řešení je:

- a) Určit hodnoty NP neúplně zadaných vnějších silových prvků silové soustavy π splňujících právě podmínku SR soustavy těles za pohybu.
- b) Určit hodnoty NP neúplně zadaných stykových výslednic soustavy π_r .
- c) Ověřit, zda požadovaný (předpokládaný) pohybový stav může reálně nastat (kontrola funkčnosti jednostranných stykových vazeb).

Algoritmus výpočtového řešení:

- a) Rozbor zadání, kontrola pohyblivosti soustavy těles.
 - b) Určení charakteru relativního pohybu v jednotlivých vazbách a jeho znázornění na osamostatněných tělesech.
 - c) Uvolnění těles při respektování relativního pohybu a orientaci jeho ovlivňování v každé stykové vazbě (každý pasivní odpor působí vždy proti relativnímu pohybu).
 - d) Statický rozbor – stanovení množiny NP, použitelných statických podmínek a kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti úlohy.
 - e) Sestavení soustavy statických rovnic pro určení NP, přičemž závislé parametry ZP jsou z rovnic vyloučeny s použitím stykových závislostí.
 - f) Analýza soustavy stat. rovnic z hlediska její řešitelnosti (lineární, nelineární) a vlastní řešení jehož cílem je určení hodnot NP.
 - g) Kontrola splnění stykových podmínek
 - předpokládané funkčnosti jednostranných vazeb (tlakovosti)
 - skutečného překonání hranice klidové stability (podmínka realizace pohybu)
 - skutečné orientace pasivních účinků proti pohybu
 - h) Analýza výsledků výpočtového řešení (je značně obtížnější než při použití modelu vazeb bez pasivních odporů).
3. Nastává pohyb a jednoznačně je dán pohybový stav jen některých členů soustavy. U ostatních těles mohou, podle skutečných podmínek ve styku, nastat odpovídající pohybové stavy (valení nebo smýkání), které mohou ovlivnit i pohybový stav zbývajících těles soustavy. Typickým případem je uložení s obecnou vazbou (viz. dále řešené úlohy).

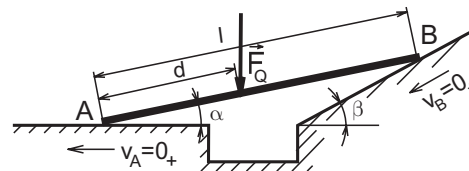
Postup výpočtového řešení je v podstatě stejný jako v případě 2. ale:

- Na začátku výpočtového řešení skutečný pohybový stav těles neznáme a musíme jej odhadnout. Aby řešení vedlo efektivně k cíli, snažíme se na základě předchozí analýzy předpokládat ten nejpravděpodobnější pohybový stav. S tímto předpokladem úlohu řešíme.
- V závěru řešení však vždy musíme ověřit, zda jsou skutečně splněny všechny podmínky realizace předpokládaného pohybového stavu (valení nebo smýkání a funkčnost vazeb) a že tento stav pro dané podmínky ve styku reálně nastane. Lze se přesvědčit, že je realizován pohybový stav s minimální potřebnou velikostí hnacího silového prvku.
- Jestliže podmínky realizace jsou splněny je řešení správné a končí. Jestliže podmínky realizace splněny nejsou a předpoklad z úvodu řešení není potvrzen (předpokládaný pohybový stav není při daných podmínkách ve styku reálný) je nutno předpoklad o pohybovém stavu změnit a provést nové řešení s následnou kontrolou.

10.5 Řešené úlohy

Aplikace teorie stykových vazeb typu NNTP a algoritmus výpočtového řešení statické rovnováhy pohyblivě uložených těles a jejich soustav jsou podrobně předvedeny při řešení následujících praktických úloh.

P1 Po prkně přemostujícím odpadní žlab pomalu vystupuje muž. Na základě výpočtu predikujte, zda se mu podaří přejít bezpečně na druhou stranu. V případě že ne, určete jeho polohu d v okamžiku, kdy nastane nekontrolovaný pohyb prkna. Dáno: délka prkna $l = 5000$ mm, úhly $\alpha = 20^\circ$ a $\beta = 30^\circ$, tíha $F_Q = 800$ N, součinitele smykového tření (adheze) $f_A = f_B = 0,4$.



Obr. 10.17:

- *Rozbor zadání:*

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je jasně formulován. Problém lze modelovat a řešit jako rovinný.

- *Možné pohybové stavy tělesa:*

Z praktické zkušenosti je zřejmé, že těleso je uloženo pohyblivě. V klidu setrvá pokud nebude překonána hranice jeho klidové stability, po jejím překonání nastává pohyb. Předpokládaný (a pravděpodobný) charakter pohybu je vyznačen na obr. 10.17.

- *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Stykové vazby A, B typu NNTP jsou podpory. Z hlediska omezování složek pohybu tělesa je podpoře přiřazena kinematická dvojice obecná – k.d.o. Funkčnost podpory je podmíněna tlakovostí stykových sil, tahové síly podpora není schopna realizovat. Nefunkční podpora pohyb tělesa neomezuje. V závislosti na silových podmínkách v dané podpoře a na uložení tělesa může ve funkční podpoře nastat klid, smýkání nebo valení. Podle charakteru realizovaného relativního pohybu podpora omezuje odpovídající počet nezávislých pohybových parametrů – stupňů volnosti (za klidu $\zeta = 3$, při valení $\zeta = 2$, při smýkání $\zeta = 1$). Ze znázorněného uložení tělesa je zřejmé, že při pohybu tělesa nastane v podporách smýkání, přičemž každá z nich odebere $\zeta_i = 1$ stupňů volnosti.

- *Kontrola pohyblivosti uložení tělesa:*

Pohyblivost tělesa určíme ze vztahu $i = i_v - \left(\sum_{i=1}^2 \zeta_i - \eta \right) = 3 - (1 + 1 - 0) = 1$

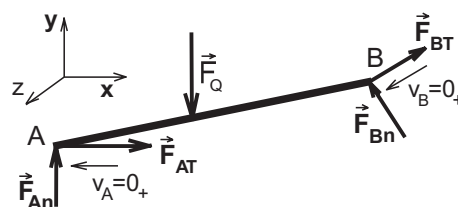
Těleso je uloženo pohyblivě, stykové vazby nezajišťují jeho statickou rovnováhu. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – těleso se může volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

Poznámka: Pokud není překonána hranice klidové stability tělesa, odebírání každá styková vazba NNTP stejný počet stupňů volnosti jako vazba pevná. Pro zajištění klidového stavu (souvisí s pohybem tělesa jako celku) pod hranicí klidové stability tedy postačuje právě jedna vazba. Další funkční vazby již způsobují omezení druhé složky mechanického pohybu t.j.deformace tělesa. V daném případě jsou za klidu omezeny tři deformační parametry ($\eta = 3$). Protože deformační charakteristiky ve staticce nejsou určovány (je v ní formulován model tuhého tělesa s nepodstatnou deformací), není taková úloha ve staticce řešitelná. Pro řešení problémů jsou ve staticce k dispozici pouze použitelné statické podmínky. Určování deformačních charakteristik těles a popis omezení parametrů deformace deformačními podmínkami bude předmětem pružnosti a pevnosti.

Po překonání hranice klidové stability nastane pohyb, který v daném případě není kontrolovaný a jeho rychlost roste. Pro řešení takového stavu nejsou statické podmínky použitelné (jsou formulovány pro rovnoměrný pohyb $\frac{dv}{dt} = 0$). Při statickém řešení se musíme omezit na stav, kdy rychlost $v_{0+} \doteq 0$ i zrychlení $\frac{dv_{0+}}{dt} \doteq 0$ jsou ještě zanedbatelně malé, t.j. na stav na hranici klidu a pohybu. Určování parametrů pohybu tělesa v závislosti na silovém působení bude předmětem dynamiky.

- *Uvolnění tělesa s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Při uvolnění tělesa (obr. 10.18) je třeba správně vyznačit předpokládaný (pravděpodobný) směr relativního pohybu v každé uvolněné stykové vazbě NNTP. Pasívní účinky působí vždy proti pohybu!! Důsledkem jejich nesprávné orientace je zásadní chyba v řešení!!



Obr. 10.18:

- *Silové soustavy působící na uvolněné těleso, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:*

Na uvolněné těleso působí dvě silové soustavy: soustavu zadaných (zde neúplně – neznáme polohu nositelky) silových prvků π představuje síla \vec{F}_Q , soustavu neúplně zadaných výslednic π_R v uvolněných stykových vazbách (neznáme souřadnice sil) představují síly \vec{F}_A , \vec{F}_B . Množina neznámých nezávislých parametrů silové soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$, působící na uvolněné těleso, je

$$NP = \{F_{An}, F_{Bn}, d\}$$

- *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP silové soustavy π_ν je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 2 + 1 + 0 = 3$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silovou soustavu π_ν charakterizovat jako obecnou rovinnou. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $3=3$ a $1=1$.

Poznámka: Pokud není překonána hranice klidové stability, jsou složky stykových výslednic na sobě nezávislé. Pak množina NP obsahuje $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 4 + 2 + 0 = 6$. Protože charakter silové soustavy π_ν a použitelné podmínky SR se nemění, není nutná podmínka statické určitosti splněna a míra statické neurčitosti je $s = \mu - \nu = 6 - 3 = 3$. Za klidu je tedy úloha třikrát staticky neurčitá a ve staticce ji nelze řešit.

- *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Tyto závislosti popisují vztah mezi nezávislými (NP) a závislými (ZP) parametry stykových výslednic v jednotlivých vazbách za pohybu. V našem případě se jedná o vztahy pro smykové tření (coulombovské)

$$F_{AT} = F_{An} \cdot f_A \quad \text{a} \quad F_{BT} = F_{Bn} \cdot f_B$$

- *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření použitelných statických podmínek a vyloučení závislých parametrů pomocí sty-

kových závislostí obdržíme soustavu statických rovnic pro NP

$$F_x: F_{An} f_A + F_{Bn} (f_B \cos \beta - \sin \beta) = 0$$

$$F_y: F_{An} + F_{Bn} (f_B \sin \beta + \cos \beta) - F_Q = 0$$

$$M_{zA}: F_{Bn} l [\sin \alpha (\sin \beta - f_B \cos \beta) + \cos \alpha (f_B \sin \beta + \cos \beta)] - F_Q d \cos \alpha = 0$$

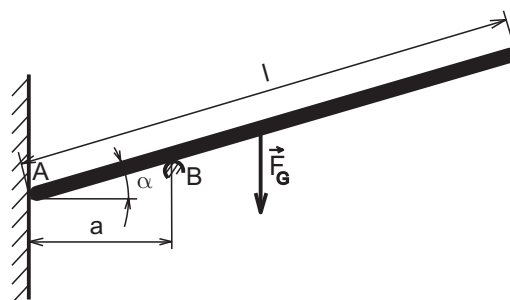
• *Řešení soustavy statických rovnic:*

V současné době je na fakultě běžně k dispozici software pro personální počítače, použitelný k řešení soustav ať lineárních nebo nelineárních rovnic. Při řešení všech následujících úloh bude předpokládáno jeho využití. Jednodušší úlohy je možno řešit i pomocí kapesní kalkulačky. V daném případě je soustava statických rovnic lineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP: $F_{An} = 211,8 \text{ N}$, $F_{Bn} = 551,7 \text{ N}$, $d = 3869 \text{ mm}$.

• *Závěr:*

Z výpočtového řešení vyplývá, že v daném případě není možné po prkně přejít bezpečně na druhou stranu překážky. Při překonání vzdálenosti $d < l$ nastává pohyb.

P2 Pro známou hodnotu součinitele adheze f_o (stejnou pro obě stykové vazby A, B) určete výpočtově krajní rovnovážné polohy (t.j. interval hodnot úhlu α), kdy homogenní tyč znázorněná na obr. 10.19, setrvá v klidu. Zadané vstupní hodnoty: $l = 1000 \text{ mm}$, $a = 200 \text{ mm}$, $F_G = 100 \text{ N}$, $f_A = f_B = 0,27$.



Obr. 10.19:

• *Rozbor zadání, možné pohybové stavy tělesa:*

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je zadán. Problém lze řešit jako rovinný. Těleso, které je uloženo pohyblivě, setrvá v klidu v případě, kdy tečné složky stykových sil budou menší než třecí síly. Při malých hodnotách součinitelů smykového tření (adheze) to nemusí být splněno pro žádnou polohu tělesa, při určité úrovni součinitelů může existovat množina rovnovážných poloh, charakterizovaná intervalem hodnot úhlu α . V tomto případě nastanou po překročení mezních rovnovážných poloh dva odlišné pohybové stavy. Po překročení krajní polohy charakterizované menší hodnotou úhlu α se tyč smýká po svislé stěně (vazba A) směrem nahoru, zatímco po překročení krajní polohy charakterizované větší hodnotou úhlu α se tyč smýká směrem dolů. Statické řešení, které je možné pro stav na hranici klidu a pohybu, provedeme pro oba mezní případy. Takto určíme hledaný interval úhlu α .

• *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Stykové vazby A, B typu NNTP jsou podpory, které můžeme charakterizovat jako kinematické dvojice obecné. Ze znázorněného uložení tělesa je zřejmé, že při pohybu tyče nastane v podporách smýkání, přičemž každá z nich odebere $\zeta_i = 1$ stupňů volnosti.

• *Kontrola pohyblivosti uložení tělesa:*

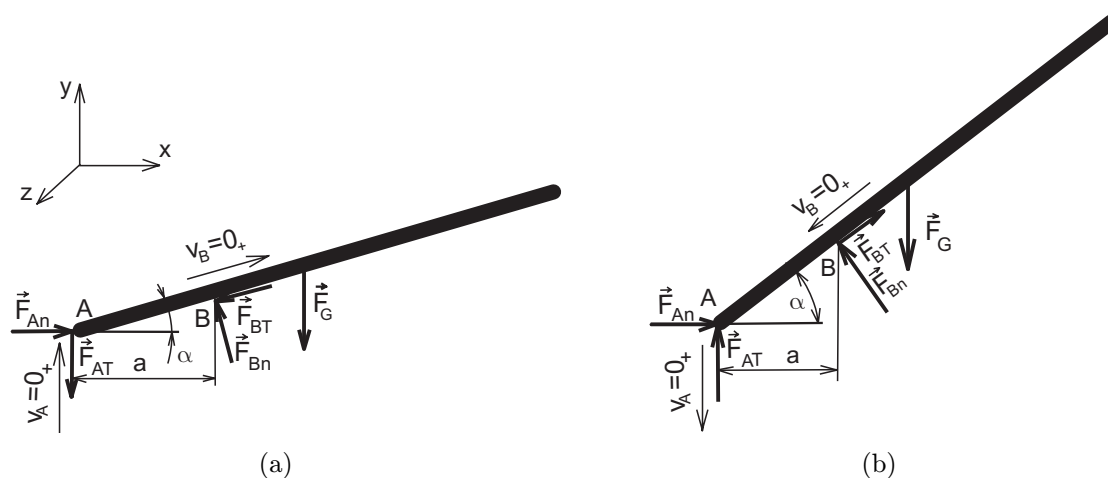
Pohyblivost tělesa určíme ze vztahu $i = i_v - \left(\sum_{i=1}^2 \zeta_i - \eta \right) = 3 - (1 + 1 - 0) = 1$

Těleso je uloženo pohyblivě, stykové vazby nezajišťují jeho statickou rovnováhu. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – těleso se může volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

• *Uvolnění tělesa s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Uvolnění tyče a výpočtové řešení provedeme postupně pro oba možné případy překročení hranice klidové stability:

- Uvolnění tyče ve spodní mezní poloze s vyznačením směru relativního pohybu v každé uvolněné stykové vazbě NNTP je znázorněno na obr. 10.20a
- Uvolnění tyče v horní mezní poloze s vyznačením směru relativního pohybu v každé uvolněné stykové vazbě NNTP je znázorněno na obr. 10.20b



Obr. 10.20:

- *Silové soustavy působící na uvolněné těleso, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:*

Na uvolněné těleso působí v obou případech dvě silové soustavy: soustavu zadaných (zde neúplně – neznáme polohu nositelky) silových prvků π představuje síla \vec{F}_G , soustavu neúplně zadaných výslednic π_R v uvolněných stykových vazbách (neznáme souřadnice sil) představují síly \vec{F}_A, \vec{F}_B . Množina neznámých nezávislých parametrů silové soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$, působící na uvolněné těleso, v obou případech je

$$NP = \{F_{An}, F_{Bn}, \alpha\}$$

- *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP silové soustavy π_ν je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 2 + 1 + 0 = 3$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silovou soustavu π_ν charakterizovat jako obecnou rovinnou. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $3=3$ a $1=1$.

$$\begin{aligned} \text{ad. a)} \quad F_x: \quad & F_{An} - F_{Bn} (f \cos \alpha + \sin \alpha) = 0 \\ F_y: \quad & -F_{An} f - F_{Bn} (f \sin \alpha - \cos \alpha) - F_G = 0 \\ M_{zB}: \quad & F_{An} a (f + \tan \alpha) - F_G \left(\frac{l}{2} \cos \alpha - a \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad. b)} \quad F_x: \quad & F_{An} + F_{Bn} (f \cos \alpha - \sin \alpha) = 0 \\ F_y: \quad & F_{An} f + F_{Bn} (f \sin \alpha + \cos \alpha) - F_G = 0 \\ M_{zB}: \quad & F_{An} a (\tan \alpha - f) + F_G \left(a - \frac{l}{2} \cos \alpha \right) = 0 \end{aligned}$$

• *Řešení soustavy statických rovnic:*

V daném případě je soustava statických rovnic nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP:

$$\text{ad. a)} \quad F_{An} = 137,6 \text{ N}, \quad F_{Bn} = 187,6 \text{ N}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

$$\text{ad. b)} \quad F_{An} = 60,3 \text{ N}, \quad F_{Bn} = 99,6 \text{ N}, \quad \alpha = 50,9^\circ.$$

• *Závěr:*

Z výpočtového řešení vyplývá, že množina klidových rovnovážných poloh tyče je charakterizována intervalem úhlu $\alpha \in (30^\circ; 50,9^\circ)$.

P3 Určete úhel sklonu nakloněné roviny α , kdy se cívka, znázorněná na obr. 10.21 začne pohybovat. Specifikujte její pohybový stav. Je dáno: $R = 200 \text{ mm}$, $F_G = 1000 \text{ N}$, $f_A = 0,15$, $e_A = 0,8 \text{ mm}$.

• *Rozbor zadání:*

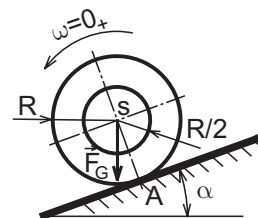
Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je formulován. Problém lze modelovat a řešit jako rovinný.

• *Možné pohybové stavy tělesa:*

Z praktické zkušenosti je zřejmé, že těleso je uloženo pohyblivě. V klidu setrvává, pokud nebude překonána hranice jeho klidové stability, po jejím překonání nastává pohyb.

• *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Styková vazba A je typu NNTP. Z hlediska omezování složek pohybu tělesa je podpoře A přiřazena kinematická dvojice obecná – k.d.o. V závislosti na silových podmínkách může při pohybu nastat ve stykovém útvaru A smýkání nebo valení. Podle charakteru realizovaného relativního pohybu podpora omezuje odpovídající počet stupňů volnosti – při valení $\zeta = 2$, při smýkání $\zeta = 1$. Na začátku výpočtového řešení charakter realizovaného pohybu neznáme, proto je třeba jej kvalifikovaně odhadnout. Pokud se řešením potvrdí, že předpoklad o pohybu byl správný, řešení končí. V případě, že podmínka realizace předpokládaného pohybového stavu není splněna, je nutno předpoklad změnit a řešení provést znovu. Praxí máme ověřeno, že po překonání hranice klidové stability nastane při běžných podmínkách ve styku valení. Podmínkou realizace valení je, aby tečná složka stykové síly, potřebná pro valení, byla menší než třecí síla t.j. $F_{At} < F_{AT}$ (nepřekonána hranice klidové stability pro smýkání).



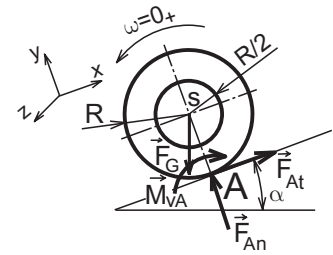
Obr. 10.21:

- *Kontrola pohyblivosti uložení tělesa:*

Za předpokladu valení je pohyblivost tělesa

$$i = i_v - (\zeta - \eta) = 3 - (2 - 0) = 1$$

Těleso je uloženo pohyblivě, stykové vazby nezajišťují jeho statickou rovnováhu. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – těleso se může volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.



Obr. 10.22:

- *Uvolnění tělesa s vyznačením relativního pohybu v uvolněné stykové vazbě, volba vhodného souřadnicového systému:*

Při uvolnění tělesa (obr. 10.22) je třeba správně vyznačit předpokládaný (pravděpodobný) směr relativního pohybu v uvolněné stykové vazbě NNTP a zavést pasívní účinky, které vždy působí proti pohybu.

- *Silové soustavy působící na uvolněné těleso, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:*

Na uvolněné těleso působí dvě silové soustavy: soustavu zadaných silových prvků π představuje síla \vec{F}_G (zde neúplně – neznáme směr nositelky síly \vec{F}_G v zavedeném s.s.), soustavu neúplně zadaných výslednic π_R v uvolněných stykových vazbách představuje styková síla \vec{F}_A . Množina neznámých nezávislých parametrů silové soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$, působící na uvolněné těleso, je

$$NP = \{F_{An}, F_{At}, \alpha\}$$

- *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP silové soustavy π_ν je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 3 + 0 + 0 = 3$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silovou soustavu π_ν charakterizovat jako obecnou rovinnou. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $3=3$ a $0 < 1$.

- *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

V daném případě se jedná o vztah pro valivý odpor (tuhé valení)

$$M_{vA} = F_{An} \cdot e_A$$

- *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření použitelných statických podmínek a vyloučení závislého parametru M_{vA} obdržíme soustavu statických rovnic pro NP

$$F_x: \quad -F_G \sin \alpha + F_{At} = 0$$

$$F_y: \quad -F_G \cos \alpha + F_{An} = 0$$

$$M_{zA}: \quad F_G R \sin \alpha - F_{An} e_A = 0$$

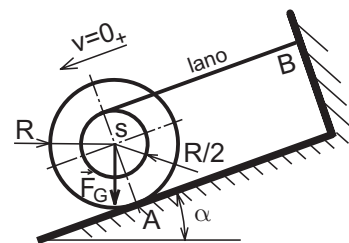
- *Řešení soustavy statických rovnic:*

Soustava statických rovnic je v daném případě nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP: $F_{An} \doteq 1000 \text{ N}$, $F_{At} \doteq 5 \text{ N}$, $\alpha = 0,229^\circ$.

- **Závěr:**

Pomocí vztahu $F_{AT} = F_{An} f_A$ je možno určit velikost třecí síly $F_{AT} = 150 \text{ N}$. Z kontroly podmínky valení vyplývá, že relace $F_{At} < F_{AT}$ je splněna a předpokládaný pohybový stav reálně nastane.

P4 Určete úhel sklonu nakloněné roviny α (obr. 10.23), kdy se cívka, na kterou je navinuto lano vázané k základnímu tělesu, začne pohybovat. Specifikujte její pohybový stav a porovnejte výsledky s řešením předchozí úlohy. Je dáno: $R = 200 \text{ mm}$, $F_G = 1000 \text{ N}$, $f_A = 0,15$, $e_A = 0,8 \text{ mm}$.



Obr. 10.23:

- **Rozbor zadání:**

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je formulován. Problém budeme modelovat a řešit jako rovinný.

- **Možné pohybové stavy tělesa:**

Stejně jako v předchozí úloze je těleso uloženo pohyblivě. V klidu setrvává, pokud nebude překonána hranice jeho klidové stability, po jejím překonání nastane pohyb. Při pohybu se bude odvíjet lano navinuté na cívce, otáčející se cívka se bude smýkat po nakloněné rovině.

- **Specifikace stykových vazeb tělesa:**

Styková vazba A je podpora typu NNTP, vazba B je vazba lanem, kterou lze modelovat jako vazbu NNTN. Z hlediska omezení složek pohybu tělesa je podpoře A i lanu B přiřazena kinematická dvojice obecná – k.d.o. Při pohybu může ve vazbě A nastat pouze smýkání, možnost valení je vyloučena uložení tělesa a charakterem vnějšího silového působení. Možný pohybový stav tělesa je tak jednoznačně dán.

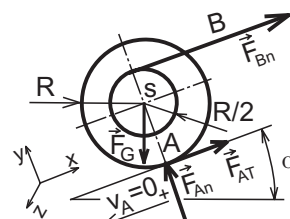
- **Kontrola pohyblivosti uložení tělesa:**

Při smýkání ve vazbě A je pohyblivost tělesa $i = i_v - \left(\sum_{i=1}^2 \zeta_i - \eta \right) = 3 - (1 + 1 - 0) = 1$

Těleso je uloženo pohyblivě, stykové vazby nezajišťují jeho statickou rovnováhu. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – těleso se může volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

- **Uvolnění tělesa s vyznačením relativního pohybu v uvolněné stykové vazbě, volba vhodného souřadnicového systému:**

Při uvolnění tělesa (obr. 10.24) je třeba správně vyznačit předpokládaný (pravděpodobný) směr relativního pohybu v uvolněné stykové vazbě NNTP a zavést pasivní účinky, které vždy působí proti pohybu.



Obr. 10.24:

- **Silové soustavy působící na uvolněné těleso, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:**

Na uvolněné těleso působí dvě silové soustavy: soustavu zadaných silových prvků π představuje síla \vec{F}_G (zde neúplně – neznáme směr nositelky síly \vec{F}_G v zavedeném s.s), soustavu neúplně zadaných výslednic π_R v uvolněných stykových vazbách představují stykové síly \vec{F}_A a \vec{F}_B . Množina neznámých nezávislých parametrů silové soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$, působící na uvolněné těleso, je

$$NP = \{F_{An}, F_{Bn}, \alpha\}$$

- **Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:**

- Počet a typ NP silové soustavy π_ν je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 3 + 0 + 0 = 3$.

- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silovou soustavu π_ν charakterizovat jako obecnou rovinnou. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $3=3$ a $0 < 1$.

- **Stykové závislosti pro pasívní účinky:**

V daném případě se jedná o vztah pro smykové tření (coulombovské)

$$F_{AT} = F_{An} \cdot f_A$$

- **Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:**

Po vyjádření použitelných statických podmínek a vyloučení závislého parametru \vec{F}_{AT} obdržíme soustavu statických rovnic pro NP

$$F_x: -F_G \sin \alpha + F_{An} f_A + F_{Bn} = 0$$

$$F_y: -F_G \cos \alpha + F_{An} = 0$$

$$M_{zS}: F_{An} f_A R - F_{Bn} \frac{R}{2} = 0$$

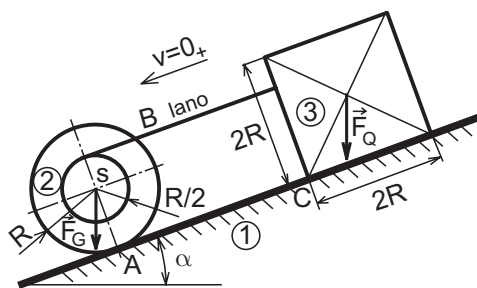
- **Řešení soustavy statických rovnic:**

Soustava statických rovnic je v daném případě nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP: $F_{An} \doteq 911,9 \text{ N}$, $F_{Bn} = 273,6 \text{ N}$, $\alpha = 24,23^\circ$.

- **Závěr:**

Z výsledků provedeného řešení je zřejmé, že realizace pohybu cívky vyžaduje podstatně větší úhel sklonu podložky než v předchozím případě, kdy se mohlo realizovat valení.

P5 Určete úhel sklonu nakloněné roviny α , kdy se dá do pohybu soustava těles, znázorněná na obr. 10.25. Na cívku je navinuto lano, které je vázáno ke kvádru. Specifikujte pohybový stav těles a porovnejte výsledky řešení s výsledky řešení předchozích dvou úloh. Je dáno: $R = 200 \text{ mm}$, $F_G = 1000 \text{ N}$, $F_Q = 2000 \text{ N}$, $f_A = 0,15$, $e_A = 0,8 \text{ mm}$, $f_C = 0,1$.



Obr. 10.25:

- **Rozbor zadání:**

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je formulován. Problém budeme modelovat a řešit jako rovinný.

- **Možné pohybové stavy tělesa:**

Již z názoru je zřejmé, že soustava těles je uložena pohyblivě. V klidu setrvává, pokud nebude překonána hranice její klidové stability, po překonávání hranice nastane pohyb. Podle silových podmínek ve stykových vazbách mohou reálně nastat různé pohybové stavy (například při velkém součiniteli tření ve styku kvádru a podložky může nastat stav, kdy kvádr setrvává v klidu a lano navinuté na cívce se odvíjí, přitom otáčející se cívka se smýká po podložce). Pravděpodobným reálným pohybovým stavem při zadaných hodnotách pasívních účinků může být stav, kdy se lano navíjí na cívku valící se po podložce, přičemž cívka za sebou táhne kvádr. Tento pohybový stav budeme dále předpokládat, na konci výpočtového řešení však musíme provést kontrolu splnění podmínek jeho realizace, t.j. podmínky valení cívky a tahového silového působení v laně.

- *Specifikace stykových vazeb těles:*

Stykové vazby A (podpora) a C (jednostranná posuvná vazba) jsou typu NNTP, vazbu B (vazba lanem) lze modelovat jako vazbu NNTN. Z hlediska omezování složek pohybu tělesa je podpoře A i lanu B přiřazena kinematická dvojice obecná – k.d.o; posuvné vazbě kinematická dvojice posuvná – k.d.p. Při pohybu předpokládáme ve vazbě A valení ($\zeta_A = 2$), ve vazbě C smýkání ($\zeta_C = 2$).

- *Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:*

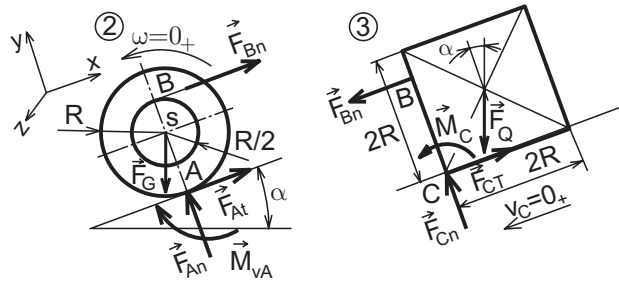
Pohyblivost soustavy těles určíme ze vztahu

$$i = (n - 1) i_v - \left(\sum_{i=1}^3 \zeta_i - \eta \right) = 2 \cdot 3 - (2 + 1 + 2 - 0) = 1,$$

kde n je počet těles v soustavě včetně základního tělesa. Soustava má při předpokládaných pohybových stavech 1^o volnosti, jedná se tedy o pohyblivé uložení. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – obě tělesa se mohou volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

- *Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Nejdříve zvolíme vhodný souřadnicový systém, ve kterém provedeme řešení. Pak uvolníme jednotlivá tělesa soustavy, přičemž v uvolněných stykových vazbách typu NNTP vyznačíme směr relativního pohybu a zavedeme pasivní účinky, které vždy působí proti pohybu. Uvolnění je znázorněno na obr. 10.26. Pro výpočtové řešení použijeme zvolený souřadnicový systém $Oxyz$.



Obr. 10.26:

Poznámka: Uvolnění všech těles a řešení SR soustavy musí být provedeno v jejich daných polohách a v jednom (společném) souřadnicovém systému. Formulace podmínek SR pro jednotlivá tělesa v potočených polohách nebo v rozdílných souřadnicových systémech nesplňuje podmínky axiomu o vzájemném působení (principu akce a reakce)!!

- *Silové soustavy působící na uvolněná tělesa, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:*

Na uvolněná tělesa působí v obou případech silové soustavy vnějších silových prvků π_i a soustavy π_{Ri} stykových výslednic působících v uvolněných stykových vazbách. Výsledná množina neznámých nezávislých parametrů silových soustav $\pi_{\nu i} = \pi_i \cup \pi_{Ri}$, působících na uvolněná tělesa, je $NP = \cup NP_i$

$$NP = \{F_{An}, F_{At}, F_{Bn}, F_{Cn}, M_{Cn}, \alpha\}$$

- *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP je

$$\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 5 + 0 + 1 = 6.$$

- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silové soustavy $\pi_{\nu i}$, působící na uvolněná tělesa, charakterizovat jako obecné rovinné soustavy sil. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \cup \nu_i = \nu_F + \nu_M = 4 + 2 = 6$.

- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $6 = 6$ a $1 < 2$.

- *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Styková závislost ve vazbě A (tuhé valení) je popsána vztahem $M_{vA} = F_{An} \cdot e_A$, styková závislost ve vazbě C (coulombovské smykové tření) je popsána vztahem $F_{CT} = F_{Cn} \cdot f_C$.

- *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření statických podmínek a vyloučení závislých parametrů pomocí stykových závislostí obdržíme soustavu statických rovnic pro NP.

Těleso 2:

$$\begin{aligned} F_x: & F_{At} + F_{Bn} - F_G \sin \alpha = 0 \\ F_y: & F_{An} - F_G \cos \alpha = 0 \\ M_{zS}: & F_{At} R - F_{An} e_A - F_{Bn} \frac{R}{2} = 0 \end{aligned}$$

Těleso 3:

$$\begin{aligned} F_x: & -F_{Bn} + F_{Cn} f_C - F_Q \sin \alpha = 0 \\ F_y: & F_{An} - F_G \cos \alpha = 0 \\ M_{zS}: & F_{At} R - F_{An} e_A - F_{Bn} \frac{R}{2} = 0 \end{aligned}$$

- *Řešení soustavy statických rovnic:*

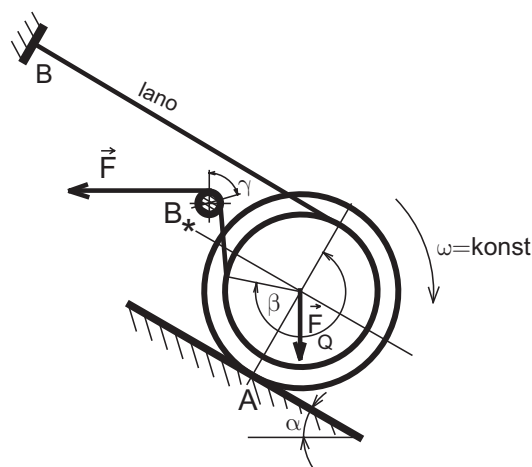
Soustava statických rovnic je nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP a ZP:

$$F_{An} = 997,1 \text{ N}, F_{At} = 27,9 \text{ N}, F_{AT} = 149,6 \text{ N}, F_{Bn} = 47,9 \text{ N}, F_{Cn} = 1994,2 \text{ N}, F_{CT} = 199,4 \text{ N}, M_{Cn} = 354,2 \text{ Nm}, \alpha = 4,35^\circ.$$

- *Kontrola splnění předpokladů pohybového stavu, závěr:*

Z výsledků řešení vyplývá, že podmínka valení $F_{At} < F_{AT}$ ve vazbě A je splněna a vazby B a C jsou funkční. Podmínky realizace pohybového stavu, předpokládaného na začátku řešení jsou splněny a řešení končí. Z porovnání s výsledky předchozích dvou úloh představujících dva limitní případy řešené úlohy (kvádr neovlivňující pohyb cívky resp. nepohyblivě uložený kvádr) vyplývá, že výsledky řešení jsou reálné.

P6 Při vykládání z vagonu je těžké rotačně symetrické těleso spouštěno po podložce tak, jak je to znázorněno na obr. 10.27. Těleso je homogenní a problém se vyznačuje rovinou symetrie z hlediska geometrie a stykových vazeb. Určete, jak velkou silou \vec{F} je třeba přidržovat lano, aby pohyb tělesa byl dostatečně pomalý a byly zaručeny požadované podmínky bezpečnosti. Je dáno: $R = 600 \text{ mm}$, $r = 500 \text{ mm}$, $F_G = 3000 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $e_A = 1,5 \text{ mm}$, $f_A = 0,3$, $f_B = 0,3$ (vláknové tření mezi lanem a spouštěným tělesem), $f_{B^*} = 0,2$ (vláknové tření mezi lanem a základním tělesem).



Obr. 10.27:

- *Rozbor zadání:*

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je formulován. Problém můžeme modelovat a řešit jako rovinný.

- *Možné pohybové stavy tělesa:*

Je zřejmé, že těleso je uloženo pohyblivě. Zatímco podložka pohyb tělesa omezuje a ovlivňuje,

lano jeho pohyb pouze ovlivňuje. Při pohybu tělesa může nastat buď smýkání nebo valení. Na základě praktické zkušenosti lze předpokládat, že při běžných hodnotách pasívních účinků v podpoře A nastane s velkou pravděpodobností valení. Ve styku lana působí pásové tření, které pohyb pouze ovlivní.

- *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Stykové vazbě A, která je typu NNTP, je z hlediska omezování složek pohybu tělesa přiřazena kinematická dvojice obecná. Při valení odebírá $\zeta = 2$ stupně volnosti. Po obdržení výsledků řešení bude třeba splnění podmínky valení $F_{At} < F_{AT}$ zkontrolovat! Lano B pohyb tělesa pouze ovlivňuje, proto mu neodebírá žádný stupeň volnosti.

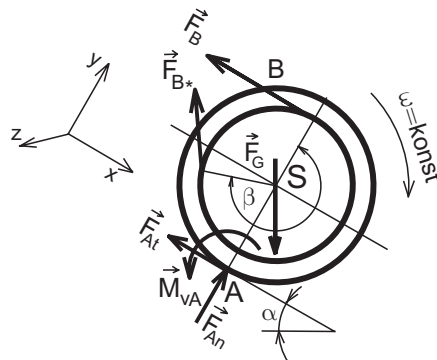
- *Kontrola pohyblivosti uložení tělesa:*

Za předpokladu valení je pohyblivost tělesa $i = i_v - (\zeta - \eta) = 3 - (2 - 0) = 1$

Těleso je uloženo pohyblivě, stykové vazby nezajišťují jeho statickou rovnováhu. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – těleso se může volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

- *Uvolnění tělesa s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Při uvolnění tělesa (obr. 10.28) je třeba vyznačit předpokládaný (pravděpodobný) směr relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách NNTP a správně orientovat pasívní účinky. Řešení provedeme v souř. systému $x y z$.



Obr. 10.28:

$$NP = \{F_{An}, F_{At}, F\}$$

- *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP silové soustavy π_ν je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 3 + 0 + 0 = 3$.

- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silovou soustavu π_ν charakterizovat jako obecnou rovinnou. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$.

- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $3 = 3$ a $0 < 1$.

- *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

V daném případě se jedná o vztahy pro valivý odpor ve vazbě A a vláknové tření ve vazbách B a B*.

$$M_{vA} = F_{An} \cdot e_A, \quad F_{B*} = F \cdot e^{\gamma f_{B*}}, \quad F_B = F_{B*} \cdot e^{\beta f_B}$$

- *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření použitelných statických podmínek a vyloučení závislých parametrů M_{vA} a F_{B*}

obdržíme soustavu statických rovnic pro NP

$$F_x: F_G \sin \alpha - F \cdot e^{\gamma f_{B^*}} [\cos(\beta - \pi) + e^{\beta f_B}] - F_{At} = 0$$

$$F_y: F_{An} + F \cdot e^{\gamma f_{B^*}} \cdot \sin(\beta - \pi) - F_G \cos \alpha = 0$$

$$M_{zS}: F_{An} e_A - F_{At} R + F \cdot r \cdot e^{\gamma f_{B^*}} (e^{\beta f_B} - 1) = 0$$

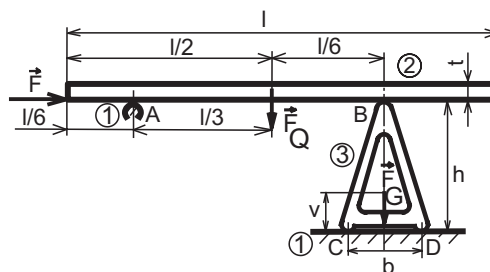
• *Řešení soustavy statických rovnic:*

Soustava statických rovnic je v daném případě lineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP: $F_{An} = 2303,8 \text{ N}$, $F_{At} = 362,1 \text{ N}$, $F = 320,2 \text{ N}$.

• *Závěr:*

S využitím stykových závislostí je možno dopočítat velikosti sil F_B , F_{B^*} v laně a velikost třecí síly $F_{AT} = 691,1 \text{ N}$. Protože je splněna podmínka valení $F_{At} < F_{AT}$, byl předpoklad valení tělesa správný a řešení je skončeno.

P7 Trám, položený na základním tělese a na podstavci (obr. 10.29), je třeba posunout v naznačeném směru. Určete velikost síly \vec{F} , potřebnou pro dosažení pohybu a zkontrolujte pohybový stav soustavy. Překlápění podstavce při posouvání trámu je nepřípustné. Je dáno: $l = 5000 \text{ mm}$, $t = 150 \text{ mm}$, $h = 1000 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$, $v = 350 \text{ mm}$, $F_Q = 1000 \text{ N}$, $F_G = 300 \text{ N}$, $f_A = 0,3$, $f_B = 0,2$, $f_C = f_D = 0,4$.



Obr. 10.29:

• *Rozbor zadání, možné pohybové stavy těles:*

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je zadán. Při výpočtovém řešení budeme předpokládat existenci roviny symetrie a problém budeme řešit jako rovinný.

Již z názoru vyplývá, že soustava je uložena pohyblivě. Při pohybu trámu může reálně nastat jeden z více možných pohybových stavů soustavy. Pravděpodobným (a požadovaným) stavem je smýkání trámu po základním tělese a podstavci, který setrvává v klidu. V závislosti na silových podmínkách ve stykových vazbách však může nastat stav, při kterém se trám smýká po základním tělese a podstavec se překlápí (jeho styk se základním tělesem ve vazbě C končí a nastává valení vazbách B a D) resp. stav, kdy se podstavec spolu s trámem posouvá po základním tělese (relativní pohyb mezi trámem a podstavcem nenastává). Při dalším řešení budeme předpokládat první případ pohybového stavu, na konci řešení bude nutno zkontrolovat splnění jeho stykových podmínek.

• *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Všechny stykové vazby mohou být modelovány jako podpory typu NNTP a můžeme je charakterizovat jako kinematické dvojice obecné. Při předpokládaném charakteru pohybu trámu nastane ve vazbách A a B smýkání (odebírají po $\zeta = 1$ stupni volnosti), ve vazbách C a D pohyb nenastává. V první fázi řešení můžeme podstavec považovat za součást základního tělesa a zabývat se pouze pohybem trámu.

• *Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:*

Pohyblivost trámu určíme ze vztahu $i = i_v - \left(\sum_{i=1}^2 \zeta_i - \eta \right) = 3 - (1 + 1 - 0) = 1$

V předpokládaném pohybovém stavu má trám 1° volnosti, jeho uložení je tedy pohyblivé. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – trám se může volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

- Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:

Jako vhodný byl pro řešení byl zvolen souřadnicový systém $Oxyz$. Uvolnění trámu s vyznačením směru relativního pohybu ve vazbách a zavedenými pasívními účinky je znázorněno na obr. 10.30.

- Silové soustavy působící na uvolněné těleso, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:

Na uvolněné těleso působí úplně zadaná silová soustava vnějších silových prvků π a neúplně zadaná soustava π_R stykových výslednic, působících v uvolněných stykových vazbách. Výsledná množina neznámých nezávislých parametrů je

$$NP = \{F_{An}, F_{Bn}, F\},$$

po jejich určení bude možno dopočítat složky stykových sil ve vazbách C a D.

- Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:

- Počet a typ NP je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 3 + 0 + 0 = 3$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silovou soustavu π_ν , působící na uvolněné těleso, charakterizovat jako obecnou rovinnou. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $3 = 3$ a $0 < 1$.

- Stykové závislosti pro pasívní účinky:

Významným pasívním účinkem v obou vazbách je smykové tření (coulombovské), popsané stykovými závislostmi $F_{AT} = F_{An} \cdot f_A$ a $F_{BT} = F_{Bn} \cdot f_B$.

- Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:

Po vyloučení ZP z použitelných statických podmínek pomocí stykových závislostí dostáváme soustavu statických rovnic pro určení NP.

$$F_x: \quad F - F_{An} f_A - F_{Bn} f_B = 0$$

$$F_y: \quad F_{An} + F_{Bn} - F_Q = 0$$

$$M_{zA}: \quad -F_Q \frac{l}{3} + F_{Bn} \frac{l}{2} = 0$$

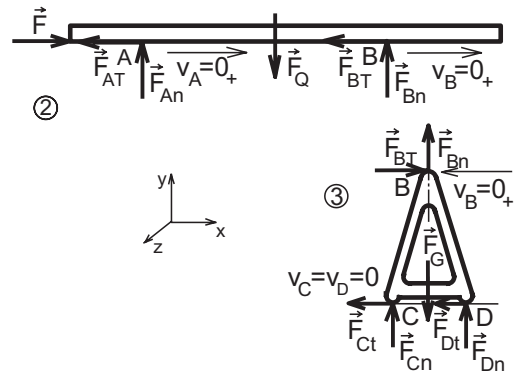
- Řešení soustavy statických rovnic:

Soustava statických rovnic je lineární, po dosazení zadaných vstupů a snadném řešení obdržíme následující hodnoty NP a ZP:

$$F_{An} = 333,3 \text{ N}, \quad F_{Bn} = 666,7 \text{ N}, \quad F = 233,3 \text{ N}, \quad F_{AT} = 100 \text{ N}, \quad F_{BT} = 133,3 \text{ N}.$$

- Kontrola splnění předpokladů pohybového stavu, závěr:

Po určení hodnot NP a ZP je nutno zkontrolovat splnění stykových omezení předpokládaného



Obr. 10.30:

pohybového stavu. Těmi jsou v daném případě podmínky, požadující aby tečné síly ve stykových vazbách C a D byly menší než třecí síly a aby normální složky v obou vazbách byly tlakové (podmínky funkčnosti).

Při vyjímkové statické neurčitosti uložení podstavce za klidu (pohyblivé uložení s omezením deformace) nelze ve staticce určit tečné složky stykových sil v jeho vazbách se základním tělesem. Můžeme určit pouze velikost výsledné tečné síly $F_{vt} = F_{Ct} + F_{Dt}$ (tečné složky stykových sil F_{Ct} a F_{Dt} mají společnou nositelku), což pro kontrolu reálnosti klidového stavu podstavce plně postačuje. Ke kontrole splnění stykových omezení použijeme vztahy

$$F_x: F_{BT} - F_{vt} = 0, \quad F_y: -F_{Bn} - F_G + F_{Cn} + F_{Dn} = 0,$$

$$M_{zD}: (F_{Bn} + F_G) \cdot b/2 - F_{BT} \cdot h - F_{Cn} \cdot b = 0,$$

z nichž po řešení vylývají hodnoty $F_{Cn} = 216,7 \text{ N}$, $F_{Dn} = 750 \text{ N}$ a $F_{vt} = 133,3 \text{ N}$. Dosazením do vztahů pro smykové tření lze určit celkovou třecí sílu $F_{vT} = F_{CT} + F_{DT} = 386,7 \text{ N}$. Protože $F_{Cn} > 0$ a $F_{vt} < F_{vT}$ lze konstatovat, že styková omezení předpokládaného pohybového stavu jsou splněna a tento pohybový stav je reálný.

P8 Soustava těles, znázorněná na obr. 10.31, má být v klidu. Určete při jakém rozmezí velikosti síly \vec{F} tento požadovaný pohybový stav nastane. Je dáno: $l = 800 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $v = 300 \text{ mm}$, $R = 200 \text{ mm}$, $\alpha = 30^\circ$, $F_{G2} = 300 \text{ N}$, $F_{G3} = 150 \text{ N}$, $f_A = 0,4$, $f_B = 0,25$, $e_C = 2 \text{ mm}$, $f_C = 0,3$.

• *Rozbor zadání:*

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je formulován. Problém budeme modelovat a řešit jako rovinný.

• *Možné pohybové stavy těles:*

Již z názoru je zřejmé, že soustava těles, vázaných stykovými vazbami typu NNTP, je uložena pohyblivě. V klidu setrvá, jestliže velikost vnější síly \vec{F} bude z intervalu $F \in (F_{min}, F_{max})$. Při velikosti $F \geq F_{max}$ bude překonána hranice její klidové stability a nastane pohyb směrem nahoru, při velikosti $F \leq F_{min}$ nastane pohyb směrem dolů. Protože za klidu není daný problém ve staticce řešitelný, budeme postupně řešit stavy na obou hranicích klidové stability.

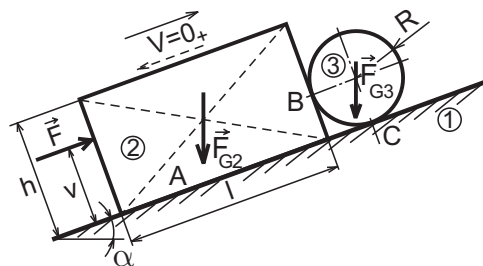
Na počátku výpočtového řešení je třeba (na základě zkušenosti) odhadnout nejpravděpodobnější charakter relativního pohybu v jednotlivých vazbách při pohybu soustavy. Nesprávný úvodní předpoklad pohybového stavu prodlužuje řešení. V daném případě je velmi pravděpodobné, že ve vazbě A nastane smýkání. Vazby B a C jsou typu podpora. Pokud ve vazbě C nastane valení, nemůže ve vazbě B nastat jiný pohybový stav než smýkání (je to důsledek neprostupnosti těles). Smýkání ve vazbě C je méně pravděpodobné – mohlo by nastat při malém součiniteli smykového tření ve vazbě C a velkém součiniteli smykového tření ve vazbě B (v tomto případě by nastal ve vazbě B relativní klid). Při řešení tedy budeme předpokládat smýkání ve vazbách A a B a valení ve vazbě C.

• *Specifikace stykových vazeb těles:*

Styková vazba A je jednostranná posuvná vazba, jíž je přiřazena kinematická dvojice posuvná (k.d.p) odebírající $\zeta = 2$ stupně volnosti. Vazbám B a C jsou přiřazeny kinematické dvojice obecné (k.d.o), tyto vazby odebírají $\zeta = 1$ (smýkání) a $\zeta = 2$ (valení) stupňů volnosti.

• *Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:*

Pohyblivost soustavy těles určíme ze vztahu



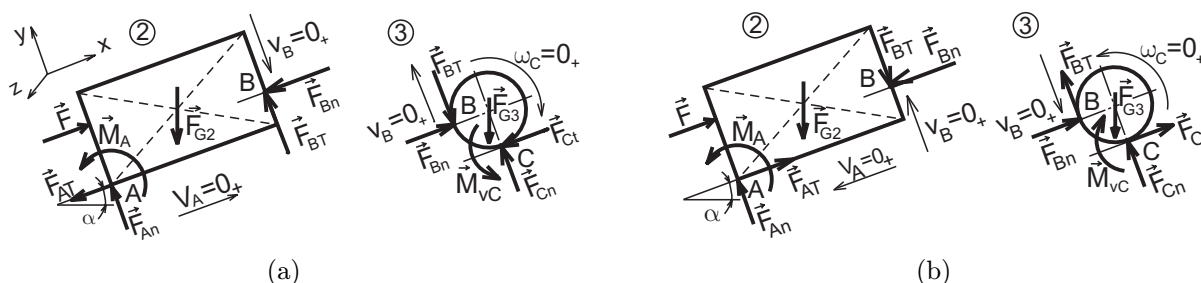
Obr. 10.31:

$$i = (n - 1) i_v - \left(\sum_{i=1}^3 \zeta_i - \eta \right) = 2 \cdot 3 - (2 + 1 + 2 - 0) = 1,$$

kde n je počet těles v soustavě včetně základního tělesa. Soustava má při předpokládaných pohybových stavech 1^o volnosti, jedná se tedy o pohyblivé uložení. Počet omezených charakteristik deformace $\eta = 0$ je zřejmý z charakteru uložení – obě tělesa se mohou volně deformovat. Jedná se tedy o normální stav uložení.

• *Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Nejdříve zvolíme vhodný souřadnicový systém $Oxyz$, ve kterém provedeme řešení. Pak uvolníme jednotlivá tělesa soustavy, přičemž v uvolněných stykových vazbách typu NNTP vyznačíme směr relativního pohybu a zavedeme pasívní účinky působící proti pohybu. Uvolnění pro první předpoklad pohybového stavu (pohyb nahoru) je znázorněno na obr. 10.32a, uvolnění pro druhý předpoklad (pohyb dolů) na obr. 10.32b.



Obr. 10.32:

$$NP = \{F_{An}, M_{An}, F_{Bn}, F_{Cn}, F_{Ct}, F\}$$

• *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 5 + 0 + 1 = 6$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silové soustavy π_{ν_i} , působící na uvolněná tělesa, charakterizovat jako obecné rovinné soustavy sil. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \cup \nu_i = \nu_F + \nu_M = 4 + 2 = 6$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $6 = 6$ a $1 < 2$.

• *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Styková závislost ve vazbách A a B (coulombovské smykové tření) je popsána vztahy $F_{AT} = F_{An} \cdot f_A$ a $F_{BT} = F_{Bn} \cdot f_B$, styková závislost ve vazbě C (tuhé valení) je popsána vztahem $M_{vC} = F_{Cn} \cdot e_C$.

• *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření statických podmínek a vyloučení závislých parametrů pomocí stykových závislostí obdržíme pro oba předpokládané stavy soustavy statických rovnic pro určení NP.

Pohyb nahoru

Těleso 2 :

$$F_x: -F_{G2} \sin \alpha - F_{Bn} - F_{An} f_A + F = 0$$

$$F_y: -F_{G2} \cos \alpha + F_{An} + F_{Bn} f_B = 0$$

$$M_{zA}: \frac{F_{G2}}{2} (h \sin \alpha - l \cos \alpha) + \\ + M_{An} + F_{Bn} (R + l f_B) - F v = 0$$

Těleso 3 :

$$F_x: F_{Bn} - F_{G3} \sin \alpha - F_{Ct} = 0$$

$$F_y: -F_{Bn} f_B - F_{G3} \cos \alpha + F_{Cn} = 0$$

$$M_{zS}: F_{Bn} f_B R + F_{Cn} e_C - F_{Ct} R = 0$$

Pohyb dolů

Těleso 2 :

$$F_x: -F_{G2} \sin \alpha - F_{Bn} - F_{An} f_A + F = 0$$

$$F_y: -F_{Bn} f_B - F_{G3} \cos \alpha + F_{Cn} = 0$$

$$M_{zA}: \frac{F_{G2}}{2} (h \sin \alpha - l \cos \alpha) + \\ + M_{An} + F_{Bn} (R - l f_B) - F v = 0$$

Těleso 3 :

$$F_x: F_{Bn} - F_{G3} \sin \alpha + F_{Ct} = 0$$

$$F_y: F_{Bn} f_B - F_{G3} \cos \alpha + F_{Cn} = 0$$

$$M_{zS}: -F_{Bn} f_B R - F_{Cn} e_C + F_{Ct} R = 0$$

• **Řešení soustavy statických rovnic:**

Soustavy statických rovnic jsou nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP a ZP:

Pohyb nahoru

$$F_{An} = 234,3 \text{ N}, M_{An} = 136,8 \text{ Nm},$$

$$F_{Bn} = 102,1 \text{ N}, F_{Cn} = 155,4 \text{ N},$$

$$F_{Ct} = 27,1 \text{ N}, F = 345,8 \text{ N}, F_{CT} = 46,6 \text{ N}$$

Pohyb dolů

$$F_{An} = 274,6 \text{ N}, M_{An} = 103,7 \text{ Nm},$$

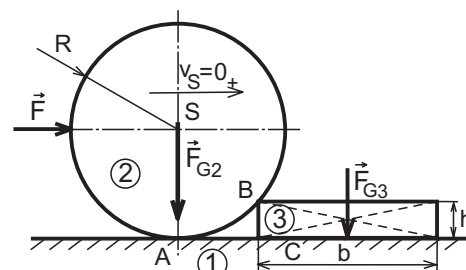
$$F_{Bn} = 59,1 \text{ N}, F_{Cn} = 115,1 \text{ N},$$

$$F_{Ct} = 15,9 \text{ N}, F = 99,2 \text{ N}, F_{CT} = 34,5 \text{ N}$$

• **Kontrola splnění předpokladů pohybového stavu, závěr:**

Z výsledků řešení vyplývá, že podmínka valení $F_{Ct} < F_{CT}$ ve vazbě C je splněna v obou řešených pohybových stavech a řešení končí. Soustava setrvává v klidu, jestliže velikost vnější síly \vec{F} bude z intervalu $F \in (99,2, 345,8)$.

[P9] Určete velikost síly \vec{F} potřebnou k dosažení pohybu homogenního válce, znázorněného na obr. 10.33, v naznačeném směru. Na počátku působení hnací síly \vec{F} je válec v kontaktu s hranolem, představujícím překážku. Analyzujte možné pohybové stavy válce a hranolu a určete, který z nich reálně nastane, jestliže výška překážky je $h = 10 \text{ mm}$. Dále je dáno: $R = 200 \text{ mm}$, $b = 200 \text{ mm}$, $F_{G2} = 500 \text{ N}$, $F_{G3} = 50 \text{ N}$, $f_A = 0,3$, $e_A = 2 \text{ mm}$, $f_B = 0,3$, $e_B = 2 \text{ mm}$, $f_C = 0,4$. V rámci samostatné přípravy proveďte řešení pro případ $h = 20 \text{ mm}$.



Obr. 10.33:

• **Rozbor zadání, možné pohybové stavy těles:**

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je zadán. Při výpočtovém řešení budeme předpokládat existenci roviny symetrie a problém budeme řešit jako rovinný.

Je zřejmé, že soustava je uložena pohyblivě. Při pohybu válce může reálně nastat jeden ze tří možných pohybových stavů soustavy. To, který reálně nastane, bude záviset na výšce a tíze překážky a vlastnostech styku. Při malé výšce hranolu je pravděpodobné valení válce přes

kvádr, který zůstává v klidu. Při velké výšce kvádrů zřejmě nastane případ, kdy se válec valí po podložce a tlačí před sebou smýkající se hranol. Může však nastat i případ, kdy na začátku valení válce po hranolu dojde k překlápění (t.j. valení) hranolu vázaného k základnímu tělesu podmíněně funkční jednostrannou posuvnou vazbou.

Protože zadaná výška hranolu h je malá v porovnání s poloměrem válce R , předpokládejme dále, že nastane první z možných pohybových stavů. Na konci řešení bude třeba zkontrolovat splnění stykových podmínek tohoto pohybového stavu.

• *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Všechny stykové vazby jsou typu NNTP. Při valení válce přes hranol přestává být podpora A funkční (styk válce s podložkou končí), v podpoře B se realizuje se valení ($\zeta = 2$) a posuvná vazba C se chová jako pevná (nepřekonána hranice klidové stability – $\zeta = 3$)

• *Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:*

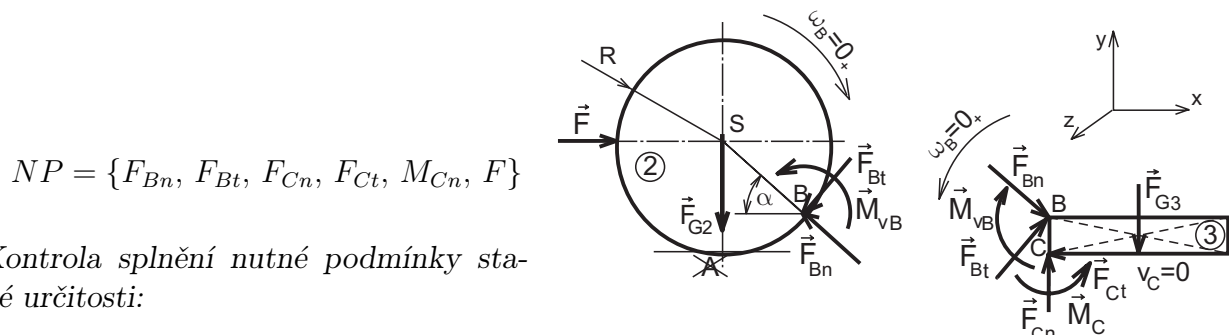
Pohyblivost soustavy určíme ze vztahu

$$i = (n - 1) i_v - \left(\sum_{i=1}^2 \zeta_i - \eta \right) = 2 \cdot 3 - (2 + 3 - 0) = 1,$$

kde n je počet těles v soustavě včetně základního tělesa. Soustava má při předpokládaných pohybových stavech 1° volnosti, jedná se tedy o pohyblivé uložení.

• *Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Uvolnění těles ve zvoleném souřadnicovém systému $Oxyz$ s vyznačením směru relativního pohybu ve vazbách a zavedenými pasívními účinky je znázorněno na obr. 10.34.



$$NP = \{F_{Bn}, F_{Bt}, F_{Cn}, F_{Ct}, M_{Cn}, F\}$$

• *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 5 + 0 + 1 = 6$. Obr. 10.34:
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silové soustavy π_{ν_i} , působící na uvolněná tělesa, charakterizovat jako obecné rovinné soustavy sil. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \cup \nu_i = \nu_F + \nu_M = 4 + 2 = 6$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $6 = 6$ a $1 < 2$.

• *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Pasívním účinkem ve vazbě B je valivý odpor, popsáný stykovou závislostí $M_{vB} = F_{Bn} \cdot e_B$.

• *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření statických podmínek a vyloučení závislého parametru pomocí stykové závislosti obdržíme soustavu statických rovnic pro NP. Úhel α je určen z geometrie — $\alpha = \arcsin \frac{R-h}{R}$.

Těleso 2:

$$\begin{aligned} F_x: & F - F_{Bt} \sin \alpha - F_{Bn} \cos \alpha = 0 \\ F_y: & F_{Bn} \sin \alpha - F_{Bt} \cos \alpha - F_{G2} = 0 \\ M_{zS}: & F_{Bn} e_B - F_{Bt} R = 0 \end{aligned}$$

Těleso 3:

$$\begin{aligned} F_x: & F_{Bn} \cos \alpha + F_{Bt} \sin \alpha - F_{Ct} = 0 \\ F_y: & -F_{Bn} \sin \alpha + F_{Bt} \cos \alpha + F_{Cn} - F_{G3} = 0 \\ M_{zB}: & -F_{Bn} e_B + M_{Cn} - F_{G3} \cdot b/2 - F_{Ct} h = 0 \end{aligned}$$

• *Řešení soustavy statických rovnic:*

Soustava statických rovnic je lineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP:

$$F_{Bn} = 528 \text{ N}, F_{Bt} = 5,3 \text{ N}, F_{Cn} = 550 \text{ N}, F_{Ct} = 170 \text{ N}, M_{Cn} = 7,755 \text{ Nm}, F = 170 \text{ N}.$$

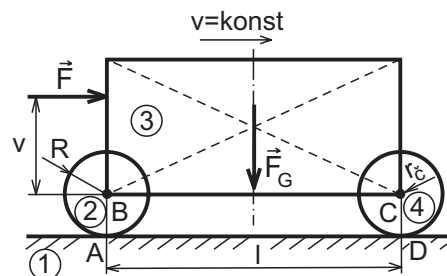
• *Kontrola splnění předpokladů pohybového stavu, závěr:*

Po určení hodnot NP a ZP je nutno zkontrolovat splnění stykových omezení předpokládaného pohybového stavu. Těmi jsou v daném případě podmínky, požadující aby tečné složky stykových sil ve vazbách B a C byly menší než třecí síly. Z hlediska funkčnosti vazeb je třeba, aby normální složky stykových sil byly tlakové a aby osa soustavy rozloženého silového působení v jednostranné posuvné vazbě C protínala stykový útvar. Ke kontrole splnění uvedených stykových omezení použijeme vztahy pro smykové tření a vztah pro určení souřadnice osy soustavy rozloženého silového působení v jednostranné posuvné vazbě $x = \frac{M_{Cn}}{F_{Cn}}$. Po dosazení určíme hodnoty $F_{BT} = 158 \text{ N}$, $F_{CT} = 220 \text{ N}$ a $x = 141 \text{ mm}$. Předpokládaný pohybový stav při výšce hranolu $h = 10 \text{ mm}$ reálně nastane, protože jeho styková omezení $F_{Bt} < F_{BT}$, $F_{Ct} < F_{CT}$ a $x < b$ jsou splněna.

P10 Soustava těles (vozik), znázorněná na obr. 10.35, se má pohybovat konstantní rychlostí v naznačeném směru. Určete potřebnou velikost síly \vec{F} . Je dáno: $l = 1000 \text{ mm}$, $v = 400 \text{ mm}$, $R = 200 \text{ mm}$, $r_{\zeta} = 20 \text{ mm}$, $F_{G2} = 1000 \text{ N}$, $f_A = f_D = 0,6$, $e_A = e_D = 2,5 \text{ mm}$, $f_{\zeta B} = f_{\zeta C} = 0,2$.

Při řešení úlohy uvažujte

- všechny pasívní odpory
- všechny pasívní odpory s použitím linearizace vztahu pro čepové tření podle Ponceleta
- zanedbání čepového tření



Obr. 10.35:

Porovnejte výsledky řešení a posuďte významnost odchylek vyvolaných linearizací vztahu pro čepové tření resp. jeho zanedbáním.

• *Rozbor zadání, možné pohybové stavy těles:*

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je zadán. Při výpočtovém řešení budeme předpokládat existenci rovin symetrie úlohy a problém budeme řešit jako rovinný.

Je zřejmé, že soustava je uložena pohyblivě. V praxi je při pohybu požadováno (a za běžných podmínek s největší pravděpodobností nastane) otáčení kol a valení v jejich vazbách se základním tělesem. Tento pohybový stav budeme předpokládat při řešení. Příklad zablokování kol není běžný a nastane když $f_{\zeta B} > f_A \frac{R}{r_{\zeta}}$ resp. $f_{\zeta C} > f_D \frac{R}{r_{\zeta}}$.

Řešení ad. a):

- *Specifikace stykových vazeb tělesa:*

Všechny stykové vazby jsou typu NNTP. Obecné vazby A, D i rotační vazby B, C odebírají $\zeta_i = 2$ stupních volnosti. Podmínkou valení v obecných vazbách je $F_t < F_T$.

- *Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:*

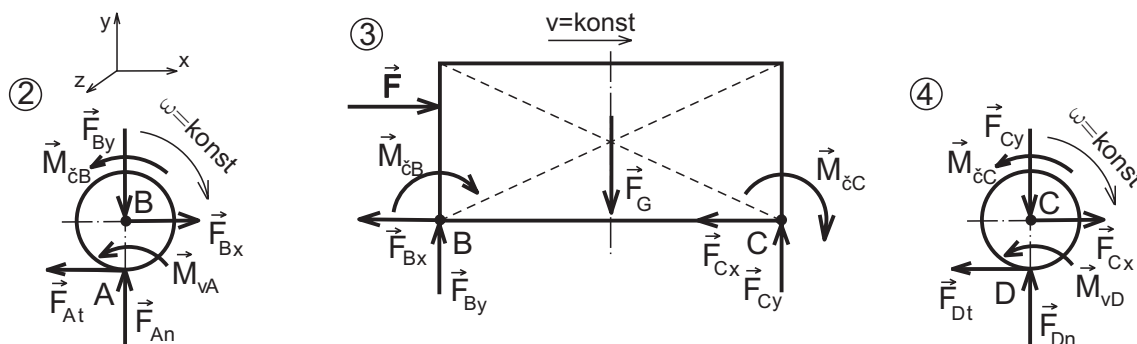
Pohyblivost soustavy určíme ze vztahu

$$i = (n - 1) i_v - \left(\sum_{i=1}^4 \zeta_i - \eta \right) = 3 \cdot 3 - (4 \cdot 2 - 0) = 1,$$

kde n je počet těles v soustavě včetně základního tělesa. Soustava má při předpokládaných pohybových stavech 1^o volnosti, jedná se tedy o pohyblivé uložení.

- *Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:*

Uvolnění těles s vyznačením směru relativního pohybu ve vazbách a zavedení pasivními účinky je znázorněno na obr. 10.36. Pro řešení byl zvolen souřadnicový systém $Oxyz$.



Obr. 10.36:

- *Silové soustavy působící na uvolněná tělesa, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:*

Na uvolněná tělesa působí v obou případech silové soustavy vnějších silových prvků π_i a soustavy π_{Ri} stykových výslednic působících v uvolněných stykových vazbách. Výsledná množina neznámých nezávislých parametrů silových soustav $\pi_{\nu i} = \pi_i \cup \pi_{Ri}$, působících na uvolněná tělesa, je $NP = \cup NP_i$

$$NP = \{F_{An}, F_{At}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Dn}, F_{Dt}, F\}$$

- *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 9 + 0 + 0 = 9$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silové soustavy $\pi_{\nu i}$, působící na uvolněná tělesa, charakterizovat jako obecné rovinné soustavy sil. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \cup \nu_i = \nu_F + \nu_M = 6 + 3 = 9$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $9 = 9$ a $0 < 3$.

- *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Pasívním účinkem ve vazbách A, D je valivý odpor, popsáný stykovými závislostmi $M_{vA} = F_{An} \cdot e_A$ resp. $M_{vD} = F_{Dn} \cdot e_D$. V rotačních vazbách B, C (radiální čepy) působí čepové tření popsané stykovými závislostmi $M_{\check{C}B} = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} f_{\check{C}B} r_{\check{C}B}$ resp. $M_{\check{C}C} = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{C}C} r_{\check{C}C}$.

- *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření statických podmínek a vyloučení závislých parametrů pomocí stykových závislostí obdržíme soustavu statických rovnic pro NP.

Těleso 2 :

$$F_x: F_{Bx} - F_{At} = 0$$

$$F_y: F_{An} - F_{By} = 0$$

$$M_{zA}: -F_{Bx} R + \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} f_{\check{C}B} r_{\check{C}B} + F_{An} e_A = 0$$

Těleso 4 :

$$F_x: F_{Cx} - F_{Dt} = 0$$

$$F_y: F_{Dn} - F_{Cy} = 0$$

$$M_{zD}: -F_{Cx} R + \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{C}C} r_{\check{C}C} + F_{Dn} e_D = 0$$

Těleso 3:

$$F_x: F - F_{Bx} - F_{Cx} = 0$$

$$F_y: F_{By} + F_{Cy} - F_G = 0$$

$$M_{zB}: -F v - \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} f_{\check{C}B} r_{\check{C}B} - F_G \frac{l}{2} - \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{C}C} r_{\check{C}C} + F_{Cy} l = 0$$

- *Řešení soustavy statických rovnic:*

V důsledku vztahů pro čepové tření je soustava statických rovnic nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP:

$$F_{An} = 483 \text{ N}, F_{At} = 15,7 \text{ N}, F_{Bx} = 15,7 \text{ N}, F_{By} = 483 \text{ N}, F_{Cx} = 16,8 \text{ N}, F_{Cy} = 517 \text{ N}, F_{Dn} = 517 \text{ N}, F_{Dt} = 16,8 \text{ N}, F = 32,51 \text{ N}.$$

- *Kontrola splnění předpokladů pohybového stavu, závěr:*

Po určení hodnot NP a ZP je nutno zkontrolovat splnění stykových omezení předpokládaného pohybového stavu. Těmi jsou v daném případě podmínky valení ve vazbách A $F_{At} < F_{AT}$ a D $F_{Dt} < F_{DT}$. O jejich splnění se lze snadno přesvědčit.

Řešení ad. b):

V literatuře jsou udávány vztahy umožňující linearizaci řešeného problému, uváděné jako Ponceletovy vztahy. Podle nich lze velikost silové stykové výslednice $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ přibližně určit pomocí lineárního vztahu $F \doteq 0,96 F_x + 0,4 F_y$ (při $F_x > F_y$) resp. vztahu $F \doteq 0,96 F_y + 0,4 F_x$ (při $F_y > F_x$). Relativní odchylka při určení velikosti síly nepřesáhne hodnotu 4%. Ve většině případů je tato přesnost postačující.

Po náhradě členů, způsobujících nelineritu, obdržíme snadněji řešitelnou soustavu lineárních rovnic. Po jejím řešení obdržíme následující hodnoty NP:

$$F_{An} = 483,3 \text{ N}, F_{At} = 15,4 \text{ N}, F_{Bx} = 15,4 \text{ N}, F_{By} = 483,3 \text{ N}, F_{Cx} = 16,5 \text{ N}, F_{Cy} = 516,7 \text{ N}, F_{Dn} = 516,7 \text{ N}, F_{Dt} = 16,5 \text{ N}, F = 31,95 \text{ N}.$$

Řešení ad. c):

Dále si ukážeme, jak významný vliv na výsledek řešení může mít zanedbání těch pasívních účinků, které jsou z hlediska řešeného problému podstatné. Při zanedbání čepového tření vymizí

v soustavě statických rovnic členy, které je popisují. Obdržíme soustavu lineárních rovnic jejímž řešením určíme následující hodnoty NP:

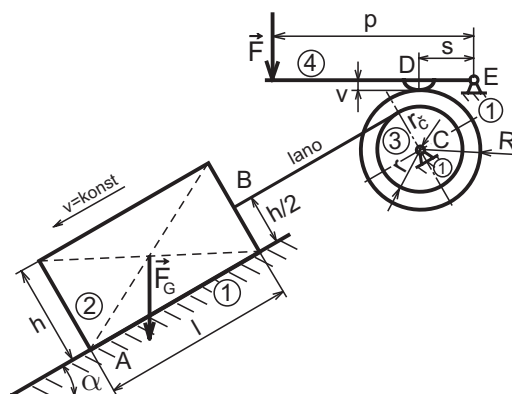
$$F_{An} = 495 \text{ N}, F_{At} = 6,2 \text{ N}, F_{Bx} = 6,2 \text{ N}, F_{By} = 495 \text{ N}, F_{Cx} = 6,3 \text{ N}, F_{Cy} = 505 \text{ N}, F_{Dn} = 505 \text{ N}, F_{Dt} = 6,3 \text{ N}, F = 12,5 \text{ N}.$$

• **Závěr:**

Z výsledků výpočtů vyplývá, že linearizace řešeného problému dává velmi přesné výsledky v porovnání s původním nelineárním řešením. Zanedbání čepového tření však vede k podstatným odchylkám a to zvláště ve velikosti hnací síly.

Z uvedeného případu tedy vyplývá ponaučení: Zanedbání některých pasívních účinků by měla předcházet důkladná analýza jejich významnosti!

P11 Břemeno, znázorněné na obr. 10.37, má být spouštěno bezpečně, t.j. malou a konstantní rychlostí. Určete potřebnou velikost síly \vec{F} působící na páku špalíkové brzdy. Podobně jako při řešení předchozí úlohy posuďte významnost odchylek vyvolaných linearizací vztahů resp. zanedbáním čepového tření. Je dáno: $l = 600 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $\alpha = 45^\circ$, $p = 600 \text{ mm}$, $s = 250 \text{ mm}$, $v = 30 \text{ mm}$, $R = 250 \text{ mm}$, $r = 200 \text{ mm}$, $r_{\zeta} = 25 \text{ mm}$, $F_G = 500 \text{ N}$, $f_A = 0,35$, $f_{\zeta C} = 0,2$, $f_D = 0,7$.



Obr. 10.37:

• **Rozbor zadání, možné pohybové stavy těles:**

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je zadán. Při výpočtovém řešení budeme předpokládat existenci roviny symetrie úlohy a problém budeme řešit jako rovinný.

Je zřejmé, že soustava je uložena pohyblivě a pohybový stav jednotlivých těles při spouštění břemene je jednoznačně dán. Protože čepové tření při natáčení brzdové páky ve vazbě D a vliv neohebnosti lana B jsou naprosto nevýznamné a výsledek řešení prakticky neovlivní (páka se natáčí pouze v rámci opotřebovávání brzdového obložení), můžeme při výpočtovém řešení pro vazbu lanem B a rotační vazbu E použít model typu NNTN. Vliv pasívních účinků ve stykových vazbách A, C, D významný je, proto u těchto vazeb použijeme model typu NNTP.

• **Specifikace stykových vazeb soustavy těles:**

Obecné vazby B, D odebírají po $\zeta_i = 1$ stupni volnosti, posuvná vazba A a rotační vazby C, E po $\zeta_i = 2$ stupních volnosti.

• **Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:**

Pohyblivost soustavy určíme ze vztahu

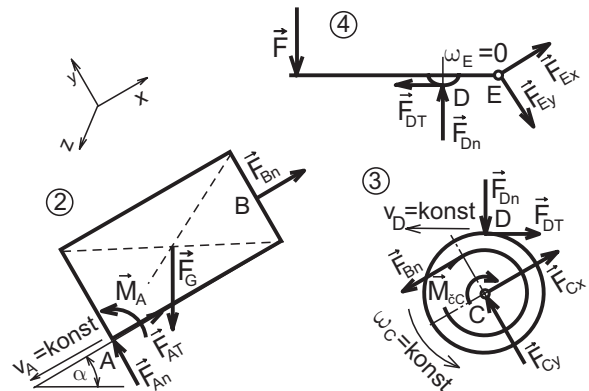
$$i = (n - 1) i_v - \left(\sum_{i=1}^5 \zeta_i - \eta \right) = 3 \cdot 3 - (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 0) = 1,$$

kde n je počet těles v soustavě včetně základního tělesa. Soustava má při předpokládaných pohybových stavech 1° volnosti, jedná se tedy o pohyblivé uložení.

• **Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:**

Uvolnění těles s vyznačením směru relativního pohybu ve vazbách a zavedenými pasívnými účinky je znázorněno na obrázku obr. 10.38. Pro řešení byl zvolen souřadnicový systém $Oxy z$.

$$NP = \{F_{An}, M_{An}, F_{Bn}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Dn}, F_{Ex}, F_{Ey}, F\}$$



Obr. 10.38:

• *Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:*

- Počet a typ NP je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 8 + 0 + 1 = 9$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silové soustavy $\pi_{\nu i}$, působící na uvolněná tělesa, charakterizovat jako obecné rovinné soustavy sil. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \cup \nu_i = \nu_F + \nu_M = 6 + 3 = 9$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $9 = 9$ a $1 < 3$.

• *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Pasívním účinkem ve vazbách A, D je smykové tření, popsané stykovými závislostmi $F_{AT} = F_{An} \cdot f_A$ resp. $F_{DT} = F_{Dn} \cdot f_D$. V rotační vazbě C (radiální čep) působí čepové tření popsané stykovou závislostí $M_{\check{c}C} = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{c}C} r_{\check{c}C}$.

• *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření statických podmínek a vyloučení závislého parametru pomocí stykové závislosti obdržíme soustavu statických rovnic pro NP.

Těleso 2 :

$$F_x: F_{An} f_A + F_{Bn} - F_G \sin \alpha = 0$$

$$F_y: F_{An} - F_G \cos \alpha = 0$$

$$M_{zA}: F_G/2 \cdot (h \sin \alpha - l \cos \alpha) + F_{An} e_A = 0$$

Těleso 4 :

$$F_x: -F \sin \alpha + F_{Dn} (\sin \alpha - f_D \cos \alpha) + F_{Ex} = 0$$

$$F_y: -F \cos \alpha + F_{Dn} (f_D \sin \alpha + \cos \alpha) - F_{Ey} = 0$$

$$M_{zE}: F \cdot p - F_{Dn} (s + f_D v) = 0$$

Těleso 3:

$$F_x: -F_{Bn} + F_{Dn} (f_D \cos \alpha - \sin \alpha) + F_{Cx} = 0$$

$$F_y: F_{Cy} - F_{Dn} (f_D \sin \alpha + \cos \alpha) = 0$$

$$M_{zC}: F_{Bn} r - F_{Dn} f_D R - \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{c}C} r_{\check{c}C} = 0$$

• *Řešení soustavy statických rovnic:*

V důsledku vztahů pro čepové tření je soustava statických rovnic nelineární, po dosazení zadaných vstupů a řešení obdržíme následující hodnoty NP:

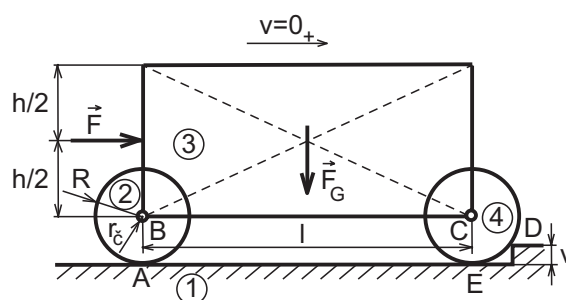
$F_{An} = 353,6 \text{ N}$, $M_{An} = 81,3 \text{ Nm}$, $F_{Bn} = 229,8 \text{ N}$, $F_{Cx} = 283,0 \text{ N}$, $F_{Cy} = 301,5 \text{ N}$, $F_{Dn} = 250,8 \text{ N}$, $F_{Ex} = 26,9 \text{ N}$, $F_{Ey} = 221,4 \text{ N}$, $F = 113,29 \text{ N}$.

Pro analýzu významnosti vlivu linearizace vztahu pro čepové tření resp. vlivu jeho případného zanedbání na výsledky řešení (hlavně na přesnost určení potřebné velikosti síly \vec{F}), je třeba provést stejné úpravy soustavy statických rovnic jako při řešení předchozí úlohy. Po úpravě rovnic a řešení obdržíme v prvním případě hodnotu $F = 113,42 \text{ N}$, ve druhém případě $F = 118,62 \text{ N}$.

• **Závěr:**

Z výsledků určení potřebné velikosti síly \vec{F} vyplývá, že v tomto případě je vliv čepového tření málo významný. Jeho zanedbání vede k odchylce menší než 5%.

P12 Určete mezní výšku překážky v , kterou při působení hnací síly \vec{F} dané velikosti působící na dané nositelce překoná vozík, znázorněný na obrázku obr. 10.39. Je dáno: $l = 1000 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $R = 150 \text{ mm}$, $r_{\check{C}B} = r_{\check{C}C} = 15 \text{ mm}$, $F_G = 1000 \text{ N}$, $f_A = f_D = 0,5$, $e_A = e_D = 2,5 \text{ mm}$, $f_{\check{C}B} = f_{\check{C}C} = 0,1$, $F = 1000 \text{ N}$.



Obr. 10.39:

• **Rozbor zadání, možné pohybové stavy těles:**

Zadání je úplné a správné, cíl výpočtového řešení je zadán. Problém budeme řešit jako rovinný. Analýza možných pohybových stavů při pohybu vozíku po rovné podložce byla provedena při řešení úlohy P10, analýza pohybu válce přes překážku při řešení úlohy P9. Při řešení této úlohy využijeme zkušeností z řešení předchozích úloh. Při přejezdu vozíku přes překážku budeme předpokládat valení kol ve vazbách A a D, styk ve vazbě E končí.

• **Specifikace stykových vazeb tělesa:**

Všechny stykové vazby jsou typu NNTP. Obecné vazby A, D i rotační vazby B, C odebírají $\zeta_i = 2$ stupňů volnosti. Podmínkou valení v obecných vazbách je $F_t < F_T$.

• **Kontrola pohyblivosti uložení soustavy těles:**

Pohyblivost soustavy určíme ze vztahu

$$i = (n - 1) i_v - \left(\sum_{i=1}^4 \zeta_i - \eta \right) = 3 \cdot 3 - (4 \cdot 2 - 0) = 1,$$

kde n je počet těles v soustavě včetně základního tělesa. Soustava má při předpokládaných pohybových stavech těles 1° volnosti, jedná se tedy o pohyblivé uložení.

• **Uvolnění těles s vyznačením relativního pohybu v uvolněných stykových vazbách, volba vhodného souřadnicového systému:**

Pro řešení byl zvolen souřadnicový systém $Oxyz$. Uvolnění těles s vyznačením směru relativního pohybu ve vazbách a zavedenými pasívními účinky je znázorněno na obrázku obr. 10.40.

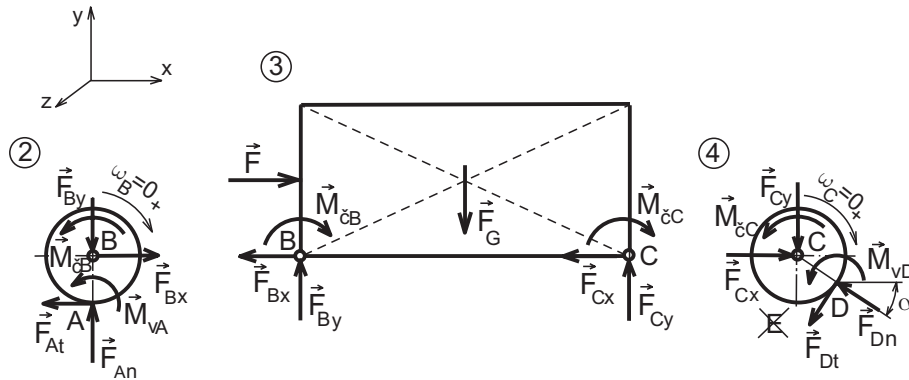
• **Silové soustavy působící na uvolněná tělesa, specifikace množiny neznámých nezávislých parametrů stykových výslednic:**

Silová soustava vnějších silových prvků π_i působí pouze na těleso 3, soustavy π_{Ri} stykových výslednic působí na všechna tři uvolněná tělesa. Výsledná množina neznámých nezávislých parametrů silových soustav $\pi_{\nu i} = \pi_i \cup \pi_{Ri}$ je $NP = \cup NP_i$

$$NP = \{F_{An}, F_{At}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Dn}, F_{Dt}, v\}$$

• **Kontrola splnění nutné podmínky statické určitosti:**

- Počet a typ NP je $\mu = \mu_f + \mu_r + \mu_M = 8 + 1 + 0 = 9$.
- Z hlediska prostorového rozložení nositelek je možno silové soustavy π_{ν_i} , působící na uvolněná tělesa, charakterizovat jako obecné rovinné soustavy sil. Proto počet použitelných podmínek statické rovnováhy je $\nu = \cup \nu_i = \nu_F + \nu_M = 6 + 3 = 9$.
- Nutná podmínka statické určitosti $\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$ je splněna, protože $9 = 9$ a $1 < 3$.



Obr. 10.40:

- *Stykové závislosti pro pasívní účinky:*

Pasívním účinkem ve vazbách A, D je valivý odpor, popsáný stykovými závislostmi $M_{vA} = F_{An} \cdot e_A$ resp. $M_{vD} = F_{Dn} \cdot e_D$. V radiálních čepích B, C působí čepové tření popsané stykovými závislostmi $M_{\check{c}B} = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} f_{\check{c}B} r_{\check{c}B}$ resp. $M_{\check{c}C} = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{c}C} r_{\check{c}C}$.

- *Sestavení soustavy statických rovnic a eliminace závislých parametrů (ZP) pomocí stykových závislostí:*

Po vyjádření statických podmínek a vyloučení závislých parametrů pomocí stykových závislostí obdržíme soustavu statických rovnic pro NP. Úhel α vyjádříme z geometrie — $\alpha = \arcsin \frac{R-v}{R}$.

Těleso 2 :

$$F_x: F_{Bx} - F_{At} = 0$$

$$F_y: F_{An} - F_{By} = 0$$

$$M_{zA}: -F_{Bx} R + \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} f_{\check{c}B} r_{\check{c}B} + F_{An} e_A = 0$$

Těleso 4 :

$$F_x: F_{Cx} - F_{Dn} \cos \alpha - F_{Dt} \sin \alpha = 0$$

$$F_y: F_{Dn} \sin \alpha - F_{Dt} \cos \alpha - F_{Cy} = 0$$

$$M_{zC}: -F_{Dt} R + \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{c}C} r_{\check{c}C} + F_{Dn} e_D = 0$$

Těleso 3:

$$F_x: F - F_{Bx} - F_{Cx} = 0$$

$$F_y: F_{By} + F_{Cy} - F_G = 0$$

$$M_{zB}: -F \frac{h}{2} - F_G \frac{l}{2} + F_{Cy} l - \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} f_{\check{c}B} r_{\check{c}B} - \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} f_{\check{c}C} r_{\check{c}C} = 0$$

- *Řešení soustavy statických rovnic:*

V důsledku vztahů pro čepové tření je soustava statických rovnic nelineární, po dosazení zadáných vstupních hodnot a řešení obdržíme následující výstupní hodnoty NP:

$$F_{An} = 460,3 \text{ N}, F_{At} = 12,3 \text{ N}, F_{Bx} = 12,3 \text{ N}, F_{By} = 460,3 \text{ N}, F_{Cx} = 987,7 \text{ N}, F_{Cy} = 539,7 \text{ N}, F_{Dn} = 1125,1 \text{ N}, F_{Dt} = 30,0 \text{ N}, v = 74,6 \text{ mm}.$$

- *Kontrola splnění předpokladů pohybového stavu, závěr:*

Po určení hodnot NP a ZP je nutno zkontrolovat splnění stykových omezení předpokládaného pohybového stavu. Těmi jsou v daném případě podmínky valení ve vazbách A $F_{At} < F_{AT}$ a D $F_{Dt} < F_{DT}$. O jejich splnění se lze snadno přesvědčit po dopočítání velikostí třecích sil $F_{AT} = 230,2 \text{ N}$ a $F_{DT} = 562,6 \text{ N}$. Řešení úlohy tím končí.

11 Základy analytické statiky.

Ve všech dřívějších kapitolách jsme rovnice statické rovnováhy hledali ze vztahů mezi silovými účinky tj. hledali jsme případy pro které byl vektorový součet sil a jejich momentů roven nule tj. hledali jsme řešení na bázi vektorového počtu. Proto tyto metody jsou řazeny do tzv. **vektorové mechaniky**.

V **analytické mechanice** podmínky rovnováhy budeme diskutovat na základě variace skalárních veličin, jakými jsou zejména práce a kinetická energie. Uvidíme, že tento postup, vycházející v podstatě z energetické bilance, umožňuje nalézat podmínky rovnováhy ihned po vyjádření jen energetických veličin, což se ukazuje (zejména u složitějších soustav) jako snazší a rychlejší. Metodický postup při řešení úloh statiky metodami analytické mechaniky se podstatně odlišuje od postupů vektorové mechaniky. Proto vyžaduje i zavedení odlišného výpočetního aparátu, jehož přednosti se však uplatní zpravidla až při diskusi rovnic statické rovnováhy u složitějších mechanických systémů, zatímco pro jednotlivá tělesa popř. jednodušší modely soustav těles u kterých se zajímáme i o určení reakcí vazeb bývá vhodnější a také názornější použití metod vektorové mechaniky.

11.1 Základní pojmy

Všechny základní vztahy budeme odvozovat pro mechanický systém, tvořený soustavou těles, obecně mezi sebou vázaných. U jednotlivých těles používáme pro popis přemístění jednotlivých bodů těles polohové vektory \vec{a}_i a pro natočení jednotlivých těles vektory pootočení $\vec{\varphi}_i$. Přitom však platí, že má-li soustava n^0 volnosti, jen n těchto parametrů je nezávislých. Proto provádíme ze všech souřadnic výběr s tím, že soubor těchto n vybraných nezávislých souřadnic q_1, q_2, \dots, q_n budeme nazývat **zobecněnými souřadnicemi**. Termínem zobecněné souřadnice tedy budeme rozumět nejmenší potřebný soubor nezávislých konfiguračních parametrů (souřadnic, úhlů, délek apod.). Analytické vyjádření vztahů mezi závislými a nezávislými souřadnicemi mechanické soustavy nazýváme vazebními podmínkami (vazební rovnice, rovnice vazeb). Přes rovnice vazeb pak můžeme vždy z vybraných nezávislých souřadnic určit polohu všech bodů soustavy. Přitom budeme dále předpokládat, že vazby mezi tělesy jsou *holonomní* (tj. pro vazby které jsou integrovatelné, v praxi to jsou vazby nezávislé na rychlosti). Vazby tohoto typu lze vyjádřit rovnicemi typu

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n, t) \quad (11.7)$$

Základním pojmem analytické mechaniky je **virtuální pohyb** (malé posunutí nebo pootočení). V případě holonomních vazeb je to *jakýkoliv elementární pohyb, který se děje ve shodě s vazbami*. Budeme jej označovat $\delta \vec{r}_i$ (je označení pro variaci). *Skutečné pohyby* $d\vec{r}_i$ resp. $d\vec{\varphi}_i$ v čase dt (odpovídající příslušným vazbám, působícím silám a počátečním podmínkám) je jedním z virtuálních pohybů jen tehdy, jde-li o vazby *skleronomní* (tj. nezávislé na čase) popř. závislost na čase lze pro krátký časový okamžik dt zanedbat, což v naprosté většině případů je splněno. Pak virtuální posunutí odpovídá pohybům skutečným - viz obr. 1. Můžeme je tedy zjistit tak, že s tělesy v soustavě myšleně "pohneme" a vyvolaná posunutí nebo pootočení zakreslíme do schématu soustavy.

Variací vztahu (1) tedy za uvedených předpokladů můžeme dostat systém N vztahů mezi variacemi virtuálních pohybů a variacemi zobecněných souřadnic

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (11.8)$$

. (11.2) Práce vykonávaná silovými účinky při virtuálních budeme dále nazývat **virtuální prací**. Pro potřeby analytické mechaniky bude dále účelné používat rozdělení sil podle jejich pracovního efektu. Síly budeme proto dále rozdělovat na **síly pracovní** \vec{F}_i^P a **síly vazbové** \vec{F}_i^V . Vazbovými silami budeme přitom dále rozumět pouze nepracovní složky reakcí (např. kolmé složky reakcí), zatímco pracovními silami budou všechny ostatní síly. To znamená, že pracovními silami budou všechny síly akční a z reakcí pouze jejich pracovní složky (např. síla tření, moment čepového tření, moment valivého odporu apod.). Jelikož však reakce konají práci jen tehdy, uvažujeme-li pasivní odpory, je zřejmé, že *u systémů bez pasivních odporů pojem vazbové síly splývá s pojmem síly reakční, a tudíž splynou i pojmy sil pracovních a akčních.*

11.2 Statická rovnováha těles pomocí principů analytické mechaniky

11.2.1 Princip virtuální práce pro centrální silové soustavy

Nechť v bodě B tělesa působí P pracovních vnějších sil \vec{F}_i^P a S vazbových reakcí \vec{F}_i^V . Jestliže je těleso ve statické rovnováze, je splněna podmínka

$$\sum_{i=1}^P \vec{F}_i^P + \sum_j^S \vec{F}_j^V = 0 \quad (11.9)$$

Udělíme-li bodu B virtuální pohyb $\delta\vec{r}$ pak soustava sil vykoná virtuální práci

$$\sum_{i=1}^P \tilde{F}_i^P \cdot \delta\vec{r} + \sum_{j=1}^S \tilde{F}_j^V \cdot \delta\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^P \tilde{F}_i^P + \sum_{j=1}^S \tilde{F}_j^V \right) \cdot \delta\vec{r} \quad (11.10)$$

která s ohledem na vztah (11.3) a obecně nenulovou hodnotu $\delta\vec{r}$ je rovna nule. Odtud plyne princip virtuálních prací o společném působišti: *Při statické rovnováze sil působících v daném bodě tělesa, je algebraický součet virtuálních prací všech sil roven nule.* Ze vztahu (11.4) vyplývá dále věta: *Použití principu virtuální práce vede vždy na podmínky statické rovnováhy příslušné silové soustavy.* Pro vazby těles bez uvažování pasivních odporů platí, že \vec{F}_i^V jsou kolmé na $\delta\vec{r}$, takže vztah pro virtuální práci přejde na tvar

$$\sum_{i=1}^P \tilde{F}_i^P \cdot \delta\vec{r} = \sum_{i=1}^P F_{ix}^P \delta x + \sum_{i=1}^P F_{iy}^P \delta y + \sum_{i=1}^P F_{iz}^P \delta z = 0 \quad (11.11)$$

Jestliže bod B je volným bodem tj. má počet stupňů volnosti $n = 3$, je i počet nezávislých virtuálních pohybů, které bod může konat je roven také 3. Za nezávislé virtuální pohyby volíme $\delta x \neq 0$, $\delta y \neq 0$, $\delta z \neq 0$. Pak z principu virtuální práce vyplývají podmínky rovnováhy centrální silové soustavy

$$\sum_{i=1}^P F_{ix}^P = 0, \quad \sum_{i=1}^P F_{iy}^P = 0, \quad \sum_{i=1}^P F_{iz}^P = 0 \quad (11.12)$$

11.2.2 Princip virtuální práce pro obecné silové soustavy

Nechť na těleso působí k sil \vec{F}_i a dále m momentů silových dvojic \vec{M}_j . Jestliže tato obecná silová soustava je ve statické rovnováze, pak platí opět princip virtuálních prací: *Při statické rovnováze obecné silové soustavy působící na těleso je algebraický součet virtuálních prací všech sil a všech momentů roven nule.* Tento princip můžeme opět vyjádřit vztahem

$$\delta A = \sum_{i=1}^K \tilde{F}_i \delta \tilde{r}_i + \sum_{j=1}^M \tilde{M}_j \cdot \delta \tilde{\varphi} = 0 \quad (11.13)$$

kde $\delta \tilde{r}_i$ jsou virtuální posuvy působišť sil \vec{F}_i a $\delta \tilde{\varphi}$ je virtuální natočení tělesa. Vztah (11.7) se nazývá **obecná rovnice statiky**. Pro soustavu těles obsahující n členů můžeme psát vztah analogický ke vztahu (11.7)

$$\delta A = \sum_{i=1}^K \tilde{F}_i \delta \tilde{r}_i + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^M \tilde{M}_{lj} \cdot \delta \tilde{\varphi}_l = 0 \quad (11.14)$$

Jestliže použijeme dříve zavedené zobecněné souřadnice q_u ($u = 1, 2, \dots, n$), pak nezávislými virtuálními pohyby jsou δq_u . Po vyjádření závislých virtuálních pohybů pomocí základních virtuálních pohybů δq_u (používáme přitom kinematické vztahy nebo provádíme variace rovnic vazeb) lze princip virtuálních prací vyjádřit symbolicky vztahem

$$\sum_{u=1}^n \{ [P_u(F_i, M_j, q_1, q_2, \dots, q_n)] \delta q_u \} = 0 \quad (11.15)$$

kde výrazy $P_u(F_i, M_j, q_1, q_2, \dots, q_n)$ dostaneme jako koeficienty u δq_u po aplikaci vztahů (11.2) do rovnice (11.8). Vzhledem k tomu, že $\delta q_u \neq 0$, vyjadřuje každá hranatá závorka rovnovážnou rovnici silových účinků

$$P_u(F_i, M_j, q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (11.16)$$

Tento systém rovnic statické rovnováhy neobsahuje neznámé vazbové síly, říkáme mu proto *hlavní rovnice statické rovnováhy*. Vzhledem k tomu, že systém rovnic (11.10) neobsahuje reakční silové účinky, není tak rozsáhlý jako v případě systému rovnic statické rovnováhy získaného metodou uvolňování jednotlivých těles ze soustavy. Pomocí těchto vlastních rovnovážných rovnic můžeme zjistit: - přídavné vnější účinky pro uvedení mechanické soustavy do rovnováhy pro danou polohu (vyjádřenou pomocí zobecněných souřadnic) - pro danou soustavu silových účinků takové hodnoty zobecněných souřadnic q_u , při nichž statická rovnováha všech působících silových účinků nastane. Vztah (11.10) je důležitý a užitečný proto, že umožňuje přímo určit potřebné neznámé parametry v úloze. Jinak bychom je museli určovat pomocí podmínek rovnováhy uvolněných jednotlivých členů. Takže výhoda použití metod analytické mechaniky se uplatní výrazněji u soustav těles s větším počtem členů - pokud ovšem není nutné určit vazbové reakce, ale jen přídavné vnější silové účinky

Poznámka 1 : Pro vyšetřování všech virtuálních pohybů (posuvů a pootočení) u tělesa nebo soustavy těles je zapotřebí znalostí kinematických řešení těchto mechanických soustav. Proto prozatím budeme využívat principu virtuálních prací u jednoduchých mechanických soustav, u kterých můžeme sestavit potřebné vazební podmínky.

Poznámka 2 : U soustav s pasivními odpory vystupují mezi pracovními silami pracovní složky reakcí (např. třecí síly). Abychom dostali vlastní rovnice statické rovnováhy musíme, tj. rovnice neobsahující reakce, musíme pracovní složky reakcí určit nějakým jiným způsobem, zpravidla uvolňováním.

Ve většině příkladů soustavy jsou rovinné a mají jeden stupeň volnosti tj. systém rovnic (11.10) obsahuje jen jednu rovnici. K sestavení podmínek pro zjištění rovnovážného stavu lze doporučit následující postup :

- 1- určíme počet stupňů volnosti
- 2- do schématu soustavy zakreslíme všechny vnější silové účinky působící na soustavu
- 3- analyzujeme vazby. Není - li některá ideální, příslušnou pracovní složku vazebního silového účinku zahrneme do působících pracovních sil
- 4- Vybereme základní virtuální zobecněnou souřadnici q a provedeme se soustavou myšlený pohyb o δq . Najdeme odpovídající virtuální posunutí $\delta \vec{r}_i$ pro každé i -té působíště pracovních sil a všechna pootočení $\delta \vec{\varphi}_i$ kolem každé l -té osy působících pracovních momentů. Jednotlivá virtuální posunutí zakreslíme k příslušným působícím silovým účinkům a zakreslíme do schématu.
- 5- Najdeme vztahy mezi příslušnými jednotlivými virtuálními pohyby a virtuálním zobecněným přemístěním najdeme buď z rovnic vazeb $x_i(q), y_i(q), \varphi_l(q)$ pomocí derivování $\delta x_i = \frac{\partial x_i(q)}{\partial q} \delta q$, $\delta y_i = \frac{\partial y_i(q)}{\partial q} \delta q$, $\delta \varphi_l = \frac{\partial \varphi_l(q)}{\partial q} \delta q$ nebo najdeme tyto vztahy pomocí kinematických vztahů (např. z podmínky valení $\delta r = r \delta \varphi$, převodu předlohových kol apod.)
- 6 - dosadíme za $\delta x_i, \delta y_i, \delta \varphi_l$ do výrazu pro virtuální práci

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{M}_j \cdot \delta \vec{\varphi}_j = \sum F_{ix} \delta x_i + \sum F_{iy} \delta y_i + \sum M_j \delta \varphi_j = Q \delta q = 0$$

V této rovnici určujeme znaménka jednotlivých členů podle pravidel pro skalární násobení (např. je-li síla opačně orientovaná než příslušné posunutí, příslušná virtuální práce je záporná) 7- rovnici rovnováhy $Q = 0$ dostaneme zkrácením vztahu pro virtuální práci o δq

Použití principu virtuálních prací uvedeme na dvou příkladech.

Př. 11.1 U ručního zvedáku je břemeno tíhové síly \vec{F}_Q zvedáno ozubenou tyčí, poháněnou ozubenými koly. Jak velkým momentem musíme působit na ozubené kolo 2? Dáno: F_Q, r_2, r_3, R_3 .

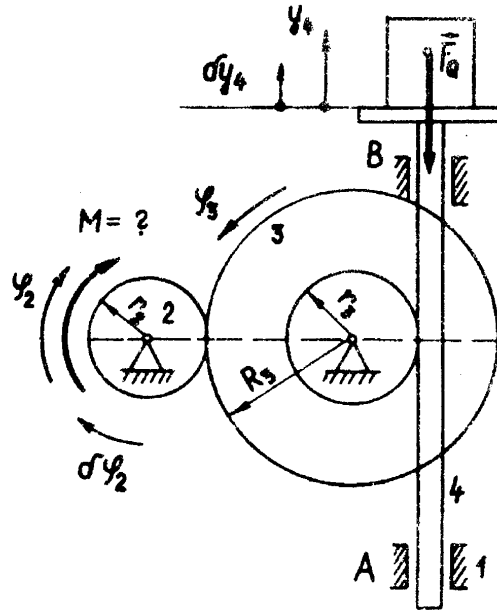
Řešení: Počet stupňů volnosti $i = (n - 1) i_v - (\sum_{i=1}^n c_i - \eta) = 3 \cdot 3 - (3 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 1^0 V$.

Soustava je rovinná a má jeden stupeň volnosti. Za nezávislou souřadnici volíme natočení φ_2 kola 2 tj. položíme $q = \varphi_2$. Ostatní souřadnice natočení kola 3 a posun tyče 4 jsou již závislé a můžeme psát přímo kinematické vztahy: $\varphi_2 \cdot r_2 = \varphi_3 \cdot r_3$ a $y_4 = \varphi_3 \cdot R_3$. Pro nezávislý virtuální pohyb $\delta \varphi_2$ jsou závislé virtuální pohyby

$$\delta \varphi_3 = \frac{r_2}{R_3} \delta \varphi_2, \quad \delta y_4 = \frac{r_2}{R_3} r_3 \delta \varphi_2$$

Použijeme princip virtuálních prací pro působící vnější silové účinky

$$\delta A = \vec{F}_Q \cdot \delta \vec{y}_4 + \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi}_2 = -F_Q \delta y_4 + M \delta \varphi_2 = 0$$



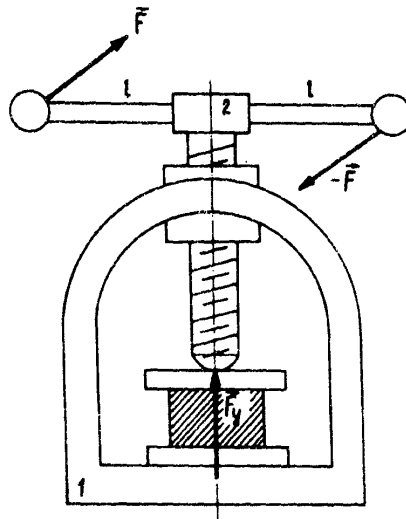
Obr. 11.1:

Po dosazení závislého virtuálního posuvu obdržíme po úpravě

$$\delta A = \left(-F_Q \frac{r_2}{R_3} r_3 + M\right) \delta q = 0$$

Vzhledem k tomu, že $\delta q \neq 0$, dostáváme pro hledaný moment na kole 2 pro zvedání nebo spouštění břemene výsledek $M = \frac{r_2}{R_3} r_3 F_Q$

Př. 11.2 U šroubového lisu je tlak na předmět vyvozován silovou dvojicí $M_{F,-F}$ působící na rameni $2l$ -obr. 11.2. Určete sílu působící na lisovaný předmět. Dáno: F, l, h (stoupání šroubovice)



Obr. 11.2:

Řešení: Těleso (šroub 2) je vázáno v prostoru.

Počet stupňů volnosti $i = (n - 1)i_v - (\sum_{i=1}^n \varsigma_i - \eta) = 1.6 - (1.5 + 1.1) = 0$ kde n je počet těles v soustavě včetně rámu. Soustava má při předpokládaném pohybovém stavu tedy 0_0 volnosti tj. je nepohyblivá. Odstraníme proto lisovaný předmět a jeho účinek nahradíme silou \vec{F}_y . Pak dostáváme novým rozbořem

$$i = (n - 1)i_v - (\sum_{i=1}^n \varsigma_i - \eta) = 1.6 - (1.5) = 1^0 V$$

Soustava je pak pohyblivá a má jeden stupeň volnosti. Pro určení nyní již "vnější" síly \vec{F}_y můžeme použít principu virtuální práce, který má tvar

$$\delta A = \vec{M}_{F,-F} \delta \vec{\psi} + \vec{F}_y \delta \vec{y} = 2Fl \delta \psi - F_y \delta y = 0$$

Za zobecněnou souřadnici q volíme natočení šroubu tj. položíme $q = \psi$ tj. $\delta q = \delta \psi$. Pro jediný závislý virtuální pohyb můžeme použít vazební podmínku

$$\frac{\delta y}{h} = \frac{\delta \psi}{2\pi} \Rightarrow \delta y = \frac{h}{2\pi} \delta \psi$$

Po dosazení do virtuální práce a úpravě obdržíme

$$\delta A = \left(2Fl - F_y \frac{h}{2\pi} \right) \delta q = 0$$

Vzhledem k tomu, že $\delta q \neq 0$, výraz v závorce $2Fl - F_y \frac{h}{2\pi} = 0$ představuje podmínku statické rovnováhy působících silových účinků. Odtud určíme sílu jakou je předmět lisován

$$F_y = \frac{4\pi l}{h} F$$

LITERATURA:

- [1] Ondráček E., Janíček P.: Výpočtové modely v technické praxi SNTL Praha 1999,
- [2] Florian Z., Suchánek M.: Mechanika těles - úlohy ze statiky skripta VUT FSI Brno 1999
- [3] Hibbeler, R.C.: Engineering Mechanics, Statics and Dynamics Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632
- [4] Juliš K., Brepta R.: Mechanika I. díl - Statika a kinematika SNTL Praha 1986
- [5] Šrejtr.: Technická mechanika I - statika SNTL Praha 1957
- [6] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Feynmanové přednášky z fyziky I ALFA Bratislava 1986 Sands, M.
- [7] Landau, L.D., Rumer, J.B.: Co je to teorie relativity Albatros Praha 1972