



Komentovaný metodický list č. 4/4

Vytvořil: Ing. Oldřich Ševeček v rámci grantového projektu FRVŠ 2421/2007/G1

**Téma:**

**Odhad směru šíření trhliny končící na rozhraní dvou materiálů.**

**Zadání:**

Pro trhlínu končící na rozhraní určete pravděpodobný směr dalšího šíření.

**Postup řešení:**

Cílem tohoto cvičení je nalézt směr ve kterém doplňkové energie  $\Delta W$  uvolněná lomovým procesem nabývá maximální hodnoty (viz závěrečná zpráva) – je to zároveň směr dalšího šíření trhliny. Jestliže se má trhlina odchýlit na rozhraní přednostně před penetrací přes rozhraní, musí být splněna následující podmínka:

$$\Delta W_d = \delta W_d - G_i^c l_d > \Delta W_p = \delta W_p - G_1^c l_p \quad (1)$$

kde  $G_i^c$  je houževnatost rozhraní,  $G_1^c$  je houževnatost materiálu M1 a  $\delta W$  je změna potenciální energie mezi původní a novou pozicí trhliny. Pro výpočet této změny potenciální energie se využije technika sdružených asymptotických rozvoju. Nelze zde použít klasický diferenciální přístup, založený na změně potenciální energie v důsledku růstu trhliny o nekonečně malý přírůstek a to z důvodů popsaných v kapitole Kritéria šíření trhliny v závěrečné zprávě. Místo nekonečně malého přírůstku se použije přírůstek konečné délky a počítá se jakou změnu potenciální energie způsobí. K tomu se využije teorie asymptotických rozvoju, na základě které, lze potom aplikací Bettiho recipročního teorému odvodit výsledný vztah pro změnu potenciální energie:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) n_i u_j^0 - \sigma_{ij}(\mathbf{u}^0) n_i u_j^\varepsilon) ds = K_1 H^2 \varepsilon^{2\delta_1} + \dots = K_1 H^2 \left(\frac{l}{L}\right)^{2\delta_1} + \dots, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (2)$$

kde  $\Gamma$  je libovolná integrační dráha obklopující kořen trhliny a  $n_i$  její normála směřující do počátku souřadnic. Asymptotický rozvoj na vnitřní oblasti aproximuje změnu potenciální energie  $\delta W$  pomocí faktoru  $K_1$  závisícího na porušení malým přírůstkem trhliny délky  $l$  přes funkce vnitřního rozvoje. Faktor  $K_1$  lze vypočítat pomocí MKP.  $H$  je zobecněný součinitel intensity napětí počítaný v rámci metodického listu č.2. (nebo v listu č.3 -  $H_{tip}$ )

Zobecněný faktor intensity  $K_1$  se vypočítá podobně jako  $H$  – užitím  $\psi$ -integrálu za pomoci numerických výpočtů na konečnoprvkovém vzorku:

$$K_1 = \frac{\Psi(\mathcal{V}_0, \rho^{\delta_1} \bar{\mathbf{u}}_1)}{\Psi(r^{-\delta_1} \bar{\mathbf{u}}_{-1}, r^{\delta_1} \bar{\mathbf{u}}_1)} \quad (3)$$

Přírůstky trhliny délek  $l_d$ ,  $l_p$  se použijí pro případ ohybu trhliny (jak jednoduchého tak oboustranného) a pro případ penetrace – viz Obr.1. Každý z těchto případů se počítá zvlášť. Vnější oblast je zatížena následujícím polem posuvů na poloměru  $r=L$ :

$$\underline{U}(x_1, x_2) = H \cdot r^\delta \cdot u(\theta) + \dots \quad (4)$$

Na vnitřní oblasti obklopující kořen trhliny prodloužený o konečný přírůstek, se napětí a posuvy vypočítají pomocí MKP systému ANSYS. Tyto výsledky jsou následně použity pro výpočet faktoru  $K_I$  a změny potenciální energie  $\delta W$  v důsledku malého přírůstku trhliny ve zvoleném směru (za zmínku stojí, že faktor  $K_I$  je nezávislý na velikosti konečného přírůstku). Jakmile se vypočítá změna potenciální energie (pro všechny případy šíření trhliny) - užitím vztahu (2), potom lze vypočítat i doplňkovou energii (1) pro příslušné stavy. Trhlina se potom bude šířit tím směrem, který maximalizuje právě tuto doplňkovou energii  $\Delta W$ .

*Demonstrativní výpočet:*

Model je opět zhotoven ze dvou materiálových vrstev M1 a M2, kde elastické vlastnosti obou materiálů jsou identické:  $E_L = 137$  GPa,  $E_T = E_Z = 10,8$  GPa  $G_{ZT} = 3,36$  GPa  $\nu_{TZ} = 0,49$   $G_{ZL} = G_{TL} = 5,65$  GPa  $\nu_{ZL} = \nu_{TL} = 0,238$  – pouze hlavní materiálové směry jsou vzájemně u těchto materiálů pootočený o  $90^\circ$ . Prakticky to znamená, že materiál M1 má Youngův modul  $E_L$  ve směru osy  $y$  a materiál M2 má  $E_L$  ve směru osy  $x$ . Je samozřejmě možné si nadefinovat jakýkoliv vlastní materiál – postup stejný jako bylo popsáno v metodickém listě č. 2.

*Kroky samotného výpočtu užitím zdrojových souborů jsou následující:*

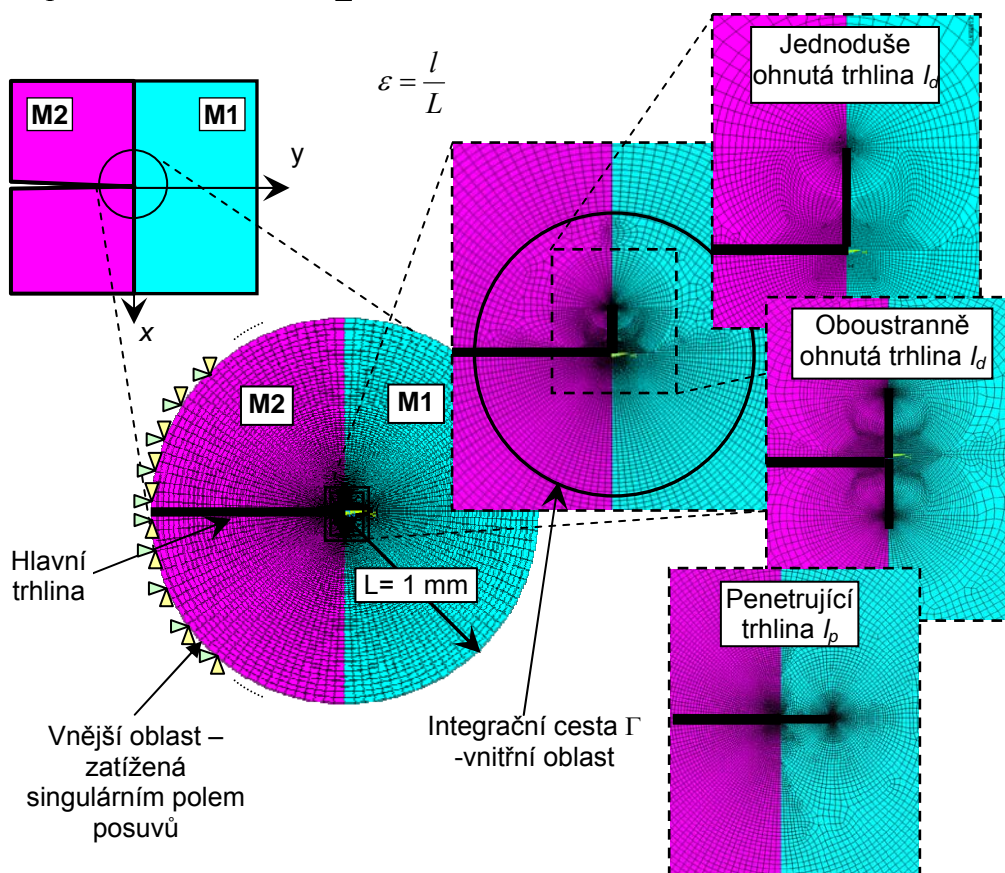
- 1) V ANSYSU je nutné nejdříve vygenerovat soubor kde jsou uloženy informace o souřadnicích uzlů na vnější oblasti - Outer domain (viz Obr. 1) – závisující na zvolené jemnosti sítě definované v souborech „*sit-bimat-SD.txt*“ atd. Je potřeba znát jejich souřadnice aby bylo možné ve stejných bodech počítat singulární řešení, které je následně potřeba pro výpočet faktoru  $K_I$ . Vypis těchto uzlů na vnější oblasti se provádí vstupním souborem „*Exe1\_Vypis\_uzlu\_na\_OD.txt*“ , který se spouští buď přímo v ANSYSU nebo lze též to samé provést na pozadí spuštěním souboru „*Vypis\_uzlu\_na\_OD.bat*“. Samozřejmostí při spuštění z ANSYSU je mít nastavený pracovní adresář jako „*4\_Kriteria*“. Výstupem je potom soubor který se vytvoří v podadresáři „*MKPdata*“ a má název „*Uzly\_na\_OuterDomain\_proALFA=0\_FIopen=0.txt*“. ALFA znamená úhel osy trhliny od záporné osy  $Y$  (ALFA=0 – trhlina kolmá na rozhraní), FIopen znamená otevření trhliny (0 je trhlina , >0 je potom vrub). První dva sloupečky v tomto souboru znamenají polární souřadnice uzlu vzhledem k souřadnému systému  $x,y$  (viz Obr.1), třetí sloupeček úhlovou souřadnici s počátkem na dolním (pravém) čele trhliny a čtvrtý sloupeček oblast ve které se daný úhel nachází (definici oblastí viz vstupní soubor).
- 2) Výstupní soubor „*Uzly\_na\_OuterDomain\_proALFA=0\_FIopen=0.txt*“ se ve druhém kroku načte do MATLABu a ten vygeneruje pro tyto uzly okrajové podmínky (posuvy) a zapíše do tvaru ve kterém bude možné tento soubor načíst přímo do ANSYSU (při zadávání okrajových podmínek). Tento krok se provede v MATLABu spuštěním souboru „*Exe2\_Boundary\_conditions\_on\_OD.m*“. Opět je nutné zkontrolovat v INPUT oblasti tohoto souboru zda všechny parametry souhlasí s těmi které chceme počítat a je nutné mít nastavený pracovní adresář opět jako „*4\_Kriteria*“. Výstupem je potom soubor, který se zapíše do podadresáře „*MATLABdata*“ a má název „*Posuvy\_uzlu\_na\_OD\_proALFA=0\_FIopen=0.txt*“. V tomto souboru jsou již potom přímo hodnoty posuvů ve všech uzlech na vnější oblasti (viz Obr.1).
- 3) Nyní je možné přistoupit k samotnému výpočtu hodnot potřebných pro výpočet faktoru  $K_I$  –vztah (3) pro různé směry šíření trhliny. K výpočtu  $K_I$  je zapotřebí vypočítat hodnoty posuvů a napětí na vnitřní oblasti – viz Obr.1, obklopující hlavní trhlina prodlouženou o malý konečný přírůstek  $l$  trhliny v daném směru.

K tomuto účelu se využije vstupní soubor „Exe3\_Run\_Kriteria.txt“ (z adresáře „4\_Kriteria“) do systému ANSYS, který na zvolené bi-materiálové konfiguraci (stejně jako byla uvažována při výpočtu GSIF) vytvoří postupně síť s přírůstkem trhliny podél rozhraní (jednostranným, oboustranným) a penetrujícím přírůstkem do materiálu M1 – viz Obr 1 a potřebné veličiny (napětí a posuvy na vnitřní oblasti) vypočítá a zapíše do výstupního souboru. Vstupní parametry do tohoto souboru je opět nutné zadat v INPUT oblasti dle řešené konfigurace. Poznamenejme, že jako okrajové podmínky se použije soubor „Posuvy\_uzlu\_na\_OD\_proALFA=0\_FIopen=0.txt“, vygenerovaný v předchozím kroku. Výstupem výpočtu jsou potom celkem 3 textové soubory umístěné do adresáře „MKPdata“:

- Uzly\_IntcestaC1\_SDproALFA=0\_FI=0\_R4=1\_inv\_eps=500.txt
- Uzly\_IntcestaC1\_DDproALFA=0\_FI=0\_R4=1\_inv\_eps=500.txt
- Uzly\_IntcestaC1\_PENproALFA=0\_FI=0\_R4=1\_inv\_eps=500\_ALFAp=0.txt

SD – Single deflection (jednoduchý ohyb), DD – Double deflection (dvojitý ohyb), PEN – Penetration (penetrace), FI – úhel trhliny od záporné osy y, R4 – poloměr vnější oblasti (OD), inv\_eps je inverzní hodnota veličiny  $\varepsilon$  ( $\varepsilon=l/L$ ), ALFAp – úhel penetrujícího přírůstku od kladné osy y.

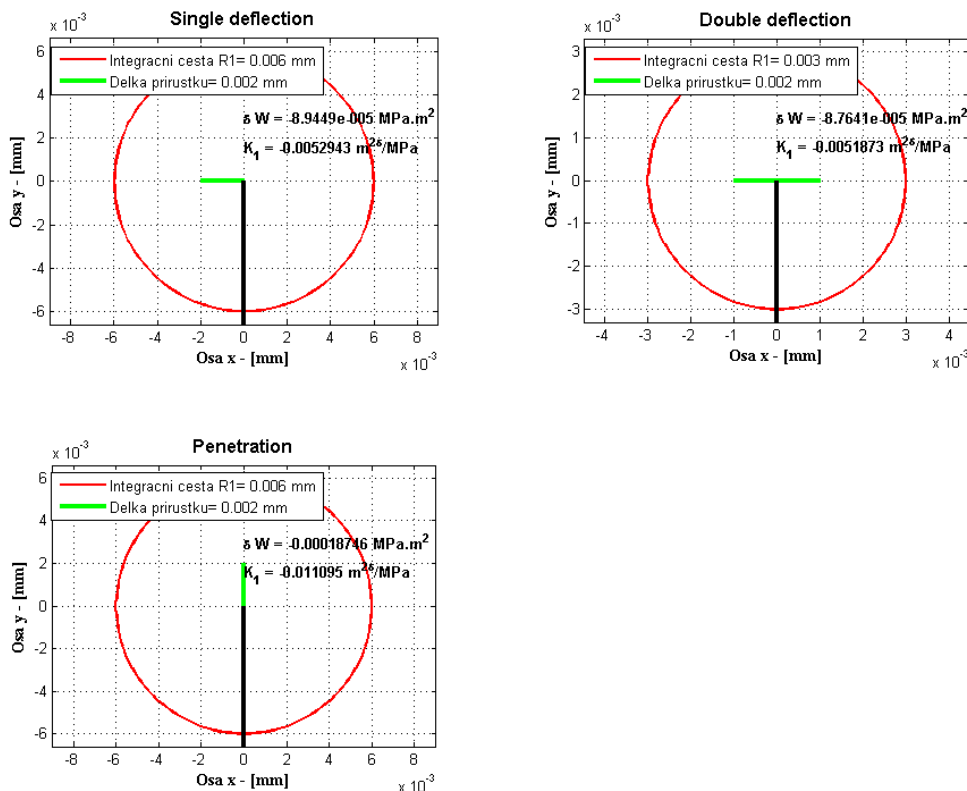
**Pozn.:** Spuštění tohoto výpočtu je opět možné provést přímo na pozadí spuštěním souboru „Pocitat\_kriteria.bat“. Při spuštění z ANSYSU je nutné mít nastavený pracovní adresář na „4\_Kriteria“.



Obr. 1 Ukázka použité FE sítě pro případ jednoduše a oboustranně ohnuté trhliny a případu penetrující trhliny

- 4) MKP data se nyní zpracují pomocí procedury v MATLABu umístěné ve vstupním souboru „*Exe4\_Run\_Kriteria\_calculation.m*“. Ten načte výstupní soubory z ANSYSU, a dle vztahů (2) a (3) vypočítá změny potenciální energie pro zmíněné tři případy. Potřebné vstupní parametry (ALFA, FI, R4, a převrácenou hodnotu epsilon) je samozřejmě nutné v tomto souboru (v oblasti INPUT) nastavit podle aktuální počítané konfigurace. Výstupem je potom graf, který zobrazuje všech tři případy možného šíření trhliny z rozhraní (jednoduchý, dvojitý ohyb a penetraci) s vypsáním délek přírůstků a odpovídajících změn potenciální energie odpovídající jednotkovému zobecněnému faktoru intenzity napětí (GSIF). Doplnkovou energii (1) je nutné potom dopočítat dle znalosti příslušné houževnatosti prostředí v daném směru  $G_i^c$  nebo  $G_I^c$  (nejlépe získané experimentálně na vhodném vzorku). Trhlina se potom bude šířit tím směrem kde bude doplňková energie maximální. Na základě těchto dat, lze potom soudit o směru dalšího šíření trhliny.

**Pozn.:** Zdrojový soubor do MATLABu „*Exe4\_Run\_Kriteria\_calculation.m*“ využívá při svém výpočtu ještě soubory „*vl\_vektory\_z\_maplu.m*“ a soubor „*SingularSolution.m*“, které musí být rovněž v pracovním adresáři přítomny. Soubor „*vl\_vektory\_z\_maplu.m*“ obsahuje vlastní čísla a vlastní vektory odpovídající bimateriálu s trhlinou končící kolmo na rozhraní. Tyto vlastní čísla a vektory vždy závisí na zvoleném materiálu, proto při každé změně materiálu je nutné nejdříve vygenerovat i tento soubor v softwaru MAPLE. Druhý soubor – funkce „*SingularSolution.m*“ sestává z vlastních čísel a vektorů funkce  $g_i(\theta)$ ,  $f_{ij}(\theta)$  – viz komentovaný list č.2 (výpočet GSIF). Stejně tak se pomocí této funkce vypočítá i tzv. pomocné řešení – viz závěrečná zpráva.



Obr. 2 Ukázka grafického výstupu ze souboru „*Exe4\_Run\_Kriteria\_calculation.m*“

### **Zhodnocení:**

Na základě výše uvedeného výpočtu a vztahu (1) lze vypočítat příslušné doplňkové energie  $\Delta W_d$  a  $\Delta W_p$  odpovídající případu ohybu trhliny a penetrace. Ta z energií, která bude maximální, bude označovat směr dalšího šíření trhliny. Problém je pouze v určení charakteristik  $G_i^c$  (houževnatost rozhraní) a  $G_1^c$  (houževnatost materiálu M1 ve směru šíření trhliny). Tyto charakteristiky nelze nijak vypočítat nýbrž je nutné je stanovit experimentálně.

### **Úlohy pro studenty:**

- Pro různé velikosti konečného přírůstku charakterizovaného parametrem  $\varepsilon$  proveďte výpočet parametrů  $K_I$  a  $\delta W$ . Výsledky vynesete do grafů a okomentujte.
- Pro různé hodnoty  $E_L$  u materiálů M1 a M2 proveďte výpočet  $\delta W$  pro jednotlivé směry šíření trhliny a výsledek okomentujte.