

## 2. ANALYTICKÁ DYNAMIKA DISKRÉTNÍCH SOUSTAV

Velká část metod počítačové mechaniky využívá variačních metod, které vycházejí z energie a práce mechanických soustav, což jsou veličiny skalární, které se lépe hodí pro výpočetní řešení i obecný pohled na mechanické problémy než přístupy vektorové. Představují tak velmi účinnou metodu ze dvou základních důvodů:

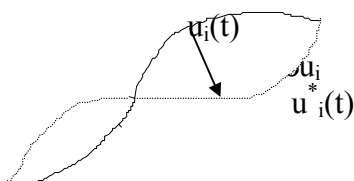
- podstatně zjednodušují analytické sestavení pohybových rovnic pro složité mechanické soustavy, především u složených pohybů, u kterých je vyjádření zrychlení složitější
- umožňují použít aproximačních numerických metod pro řešení diskrétních i spojitých mechanických soustav.

### 2.1 Princip virtuálních prací u pohybu hmotného bodu

Předpokládejme bod hmotnosti  $m$ , který se pohybuje v silovém poli, kde na něj působí síla  $\mathbf{X}$ , se složkami  $X_i$ . Při použití d'Alembertova principu lze psát rovnováhu působících a setrvačných sil ve tvaru

$$m\ddot{u}_i - X_i = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \quad (2.1.1)$$

kde  $u_i$  vyjadřuje přemístění bodu.



Obr. 2.1

Představme si, že bod se pohybuje v časovém intervalu  $(t_1, t_2)$  po dráze  $u_i^*(t)$  odlišné od skutečné dráhy  $u_i(t)$ . Pak lze definovat virtuální přemístění :

$$\delta u_i = u_i^* - u_i \quad (2.1.2)$$

Virtuální přemístění  $\delta u_i$  může být libovolné pro  $t_1 \leq t \leq t_2$  a pouze předpokládáme, že na počátku intervalu ( $t_1$ ) a na konci intervalu

procházejí tímtož bodem. Proto musí platit:

$$\delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = 0 \quad (2.1.3)$$

Z definice dané rov.(2.1.2) vidíme, že variační operátor  $\delta$  souvisí s operátorem časové derivace:

$$\frac{d}{dt}(\delta u_i) = \frac{d}{dt}(u_i^* - u_i) = u_i^* - u_i = \delta u_i \quad (2.1.4)$$

Jestliže vynásobíme rov.(2.1.1) virtuálním přemístěním a provedeme součet všech složek obdržíme:

$$\sum_{i=1}^3 (m u_i'' - X_i) \delta u_i = 0 \quad (2.1.5)$$

což dává známý *princip virtuálních prací* :

Virtuální práce vnějších a setrvačných sil je při virtuálním přemístění  $\delta u_i$  nulová.

Princip virtuálních prací lze rozšířit i na soustavu hmotných bodů. Předpokládejme soustavu  $N$  hmotných bodů o hmotnostech  $m_k$ , jejichž pohyb lze vyjádřit rovnicí:

$$m_k u_{ik}'' - X_{ik} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \quad (2.1.6)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

kde  $X_{ik}$  jsou složky známých vnějších sil a neznámých reakcí v kinematických dvojicích. Předpokládáme, že každý bod  $k$  má virtuální přemístění  $\delta u_{ik}$ , pro které platí:

$$\delta u_{ik} = u_{ik}^* - u_{ik} \quad \text{pro } i = 1, 2, 3$$

$$\delta u_{ik}(t_1) = \delta u_{ik}(t_2) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N$$

a které splňuje kinematické vazby soustavy. Vazebné síly existují vždy ve dvojicích, které jsou vzájemně v rovnováze, takže po jejich součtu v celé soustavě dají nulovou hodnotu. V tomto případě lze princip virtuálních prací vyjádřit rovnicí:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 (m_k u_{ik}'' - X_{ik}) \delta u_{ik} = 0 \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Síly v kinematických dvojicích

U soustavy *volných* bodů je stav soustavy zcela popsán  $3N$  složkami přemístění  $u_{ik}$ . Když vyjdeme z uspořádání daného hodnotou  $x_{ik}$ , lze okamžitou polohu určit z rovnice:

$$\xi_{ik}(t) = x_{ik} + u_{ik}(x, t) \quad (2.2.1)$$

U většiny mechanických soustav je pohyb bodů omezen *vazbami*, které ovlivňují pohyb a určují závislost pohybů vůči sobě. Vazby rozdělujeme na:

a) *Holonomní vazby*, které jsou definovány implicitním vztahem

$$f(\xi_{ik}, t) = 0, \quad (2.2.2)$$

Každá holonomní vazba snižuje počet stupňů volnosti o jeden. Nejsou-li tyto vazby závislé na čase, nazýváme je *vazby skleronomní*. Jsou-li funkcí času, nazývají se *rheonomní*.

b) *Neholonomní vazby* jsou takové, které nelze vyjádřit rovnicí (2.2.2). Velmi často mají tvar

$$f(\dot{\xi}_{ik}, \xi_{ik}, t) = 0 \quad (2.2.3)$$

Takovéto rovnice nejsou obecně integrovatelné.

## 2.2.1 ZOBECNĚNÉ SOUŘADNICE

Existuje-li v soustavě o  $N$  bodech  $s$  holonomních vazeb, bude počet stupňů volnosti soustavy redukován na  $3N-s$ . Soustava je určena  $n = 3N - s$  parametry, nebo zavedenými *zobecněnými souřadnicemi*  $(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ , pomocí nichž lze stanovit polohu

$$u_{ik}(x, t) = U_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (2.2.4)$$

Jsou-li v soustavě pouze holonomní vazby, budou zobecněné souřadnice vzájemně nezávislé a každou z nich lze nezávisle měnit, aniž by to ovlivnilo velikost ostatních zobecněných souřadnic. Virtuální přemístění  $\delta u_{ik}$  se dá při existenci pouze holonomních vazeb vyjádřit vztahem:

$$\delta u_{ik} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \delta q_s \quad (2.2.5)$$

Princip virtuálních prací, daný rov.(2.1.7) bude mít při použití rov.(2.2.5) tvar

$$\sum_{s=1}^n \left[ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 (m_k \ddot{u}_{ik} - X_{ik}) \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \right] \delta q_s = 0 \quad (2.2.6)$$

Jestliže zavedeme pojem *zobecněná síla* tak, aby bylo možno jednoduše vyjádřit virtuální práci při virtuální změně zobecněné souřadnice vztahem

$$\delta A = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s \quad (2.2.7)$$

můžeme porovnáním rov.(2.2.6) a rov.(2.2.7) vyjádřit zobecněnou sílu jako

$$Q_s = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 X_{ik} \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \quad (2.2.8)$$

## 2.3 Hamiltonův princip u konzervativních soustav

Hamiltonův princip je vlastně integrálem principu virtuálních prací v časovém intervalu

$\langle t_1, t_2 \rangle$ . Vyjadřujeme ho ve tvaru

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 (X_{ik} - m_k \ddot{u}_{ik}) \delta u_{ik} \right] dt = 0, \quad (2.3.1)$$

kde  $\delta u_{ik}$  je virtuální přemístění, splňující vazební a okrajové podmínky. Především předpokládáme, že působící síly  $X_{ik}$  jsou funkcí potenciálu  $V = -E_p$ , takže virtuální práce se dá vyjádřit jako

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 X_{ik} \delta u_{ik} = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s = -\delta E_p$$

Potom lze vyjádřit zobecněnou sílu rovnicí

$$Q_s = -\frac{\partial E_p}{\partial q_s} \quad (2.3.2)$$

Výraz  $m_k \ddot{u}_{ik} \delta u_{ik}$  lze vyjádřit vztahem

$$m_k \ddot{u}_{ik} \delta u_{ik} = \frac{d}{dt} (m_k \dot{u}_{ik} \delta u_{ik}) - m_k \dot{u}_{ik} \delta \dot{u}_{ik} = \frac{d}{dt} (m_k \dot{u}_{ik} \delta u_{ik}) - \delta (m_k \dot{u}_{ik} \dot{u}_{ik}).$$

Pro kinetickou energii platí

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 m_k \dot{u}_{ik} \dot{u}_{ik}, \quad (2.3.3)$$

takže rov.(2.3.1) lze zapsat ve tvaru

$$\left[ -\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 m_k \dot{u}_{ik} \delta u_{ik} \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt = 0. \quad (2.3.4)$$

Použitím okrajových podmínek, daných rov.(2.1.3), lze první člen rov.(2.3.4) vyloučit.

Rychlosti  $\dot{u}_{ik}$  lze vyjádřit pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí:

$$\dot{u}_{ik} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial U_{ik}}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (2.3.5)$$

Možno tedy říci, že jak potenciální, tak kinetická energie je funkcí zobecněných souřadnic:

$$E_k = E_k(q, \dot{q}, t) \quad E_p = E_p(q, \dot{q}, t) \quad (2.3.6)$$

Použitím rov.(2.1.3) a rov.(2.2.5) lze určit okrajové podmínky:

$$\delta q_s(t_1) = \delta q_s(t_2) = 0 \quad (2.3.7)$$

Na základě těchto vztahů lze vyjádřit *Hamiltonův princip*:

Skutečná trajektorie mechanické soustavy je taková, že integrál  $\int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt$  je stacionární s ohledem na virtuální posunutí libovolné mezi časy  $t_1$  a  $t_2$  a rovný nule pro okrajové podmínky  $t_1$  a  $t_2$  řešeného intervalu.

Tato věta, vyjádřena matematicky má tvar:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_p) dt = 0, \quad (2.3.8)$$

$$\delta q_s(t_1) = \delta q_s(t_2) = 0$$

což vlastně říká, že změna mechanické energie v časovém intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$  je nulová.

### 2.3.1 LAGRANGEOVY ROVNICE 2. DRUHU

užitím rov.(2..6) lze psát:

$$\delta E_k = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right)$$

a dosazením do rov.(2.3.8) obdržíme obecnější vztah:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^n \left[ \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_s} + Q_s \right) \delta q_s + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s \right] dt = 0 \quad .$$

Druhý výraz lze integrovat po částech:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} dt = \left[ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \right) \delta q_s dt = 0 \quad .$$

Když budeme aplikovat okrajové podmínky obdržíme pro Hamiltonův princip upravenou rovnici

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^n \left[ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial E_k}{\partial q_s} + Q_s \right] \delta q_s dt = 0 \quad (2.3.9)$$

Variace  $\delta q_s$  může být libovolná v celém intervalu, takže obdržíme pohybovou rovnici ve tvaru odvozeném Lagrangem

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_s} = Q_s \quad \text{pro } s = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.10)$$

Obdrželi jsme tak zvanou *Lagrangeovu rovnici 2. druhu*.

## **2.4 Klasifikace zobecněných sil**

Síly je možno dělit na vnitřní a vnější síly. V obou případech mohou být tyto síly konzervativní, jestliže jejich virtuální práce je regenerovatelná.

### 2.4.1 VNITŘNÍ SÍLY

Vazebné síly

Vazebné síly vznikají při tuhém spojení mezi dvěma body a to tak, že soustava sil je v rovnováze

$$X_{i1} + X_{i2} = 0$$

Virtuální práce je dána

$$\delta A = \sum_{i=1}^3 (X_{i1} \delta u_{i1} + X_{i2} \delta u_{i2}) = \sum_{i=1}^3 [X_{i1} (\delta u_{i1} - \delta u_{i2})] = 0$$

Odtud je vidět, že vazebné síly není nutno zahrnovat do zobecněných sil, působících na mechanickou soustavu. To je jedna z důležitých výhod použití Lagrangeových rovnic.

### 2.4.1.1 Pružné síly

Pružné těleso lze definovat tak, že přivedená práce se akumuluje do využitelné formy. To vede na variaci vnitřní energie:

$$\delta E_{\text{int}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N \frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} = -\delta A$$

kde  $A$  je virtuální práce vnitřních sil. Vnitřní energii lze vyjádřit jako funkci zobecněných posunutí

$$E_{\text{int}} = E_{\text{int}}(q, t)$$

a dále 
$$\delta A = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s = -\delta E_{\text{int}}$$

a 
$$Q_s = -\frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial q_s} \quad (2.4.1)$$

### 2.4.1.2 Disipativní síly

*Disipativní síly* mohou být charakterizovány tak, že jsou rovnoběžné s vektorem rychlosti, jsou opačného smyslu a úměrné jejímu modulu. Disipativní síla, působící na hmotný bod může být definována výrazem

$$\vec{X}_k = -C_k f_k(v_k) \frac{\vec{v}_k}{v_k}$$

nebo jako funkce složek

$$X_{ik} = -C_k f_k(v_k) \frac{v_{ik}}{v_k} \quad (2.4.2)$$

kde  $C_k$  je konstanta

$f_k(v_k)$  je funkce, vyjadřující závislost na rychlosti

$v_k$  je absolutní rychlost bodu  $k$

$$v_k = |\vec{v}_k| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_{ik}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_{ik}^2}$$

Virtuální práce disipativních sil je

$$\sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N X_{ik} \delta u_{ik} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^n X_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s} \delta q_s$$

a dosazením za  $X_k$

$$Q_s = - \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N C_k f_k(v_k) \frac{v_{ik}}{v_k} \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s} \quad (2.4.3)$$

Při tom platí

$$v_{ik} = \frac{du_{ik}}{dt} = \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_r} \delta q_r$$

$$\text{a} \quad \frac{\partial v_{ik}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s} \quad (2.4.4)$$

takže lze psát

$$\begin{aligned} Q_s &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N C_k f_k(v_k) \frac{v_{ik}}{v_k} \frac{\partial v_{ik}}{\partial \dot{q}_s} = - \sum_{k=1}^N C_k f_k(v_k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 v_{ik}^2 \right] = \\ &= - \sum_{k=1}^N C_k f_k(v_k) \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_s} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Zavedme *disipativní funkci*

$$D = \sum_{k=1}^N \int_0^{v_k} C_k f_k(v) dv, \quad (2.4.6)$$

takže obdržíme

$$Q_s = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_s}. \quad (2.4.7)$$

Disipovaný výkon lze vyjádřit rovnicí

$$P = \sum_{s=1}^n Q_s \dot{q}_s = - \sum_{s=1}^n \dot{q}_s \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_s}$$

Jestliže předpokládáme, že disipativní funkce  $D$  je homogenní, řádu  $h$  zobecněné rychlosti, obdržíme z rov.(2.3.2)

$$\frac{d}{dt}(E_K + E_P) = -hD \quad (2.4.8)$$

$h$  je řád disipativní funkce, takže řád disipativní síly  $Q_s$  je  $(h - 1)$  a vyjadřuje různé fyzikální případy:

$h = 1$	suché tření
$h = 2$	viskózní (lineární) tlumení
$h = 3$	aerodynamické tlumení

## 2.4.2 VNĚJŠÍ SÍLY

### 2.4.2.1 Konzervativní síly

Jsou-li síly konzervativní je jejich virtuální práce na uzavřené dráze nulová:

$$\delta A = \oint Q_s \delta q_s = 0$$

jinými slovy:

Velikost vykonané práce nezávisí na dráze, ale pouze na počáteční a konečné poloze.

V tomto případě platí:

$$Q_s = -\frac{\partial E_P}{\partial q_s} \quad (2.4.9)$$

### 2.4.2.2 Nekonzervativní síly

Jsou-li vnější síly nekonzervativní, získáme odpovídající zobecněné síly použitím rovnice pro virtuální práci:

$$\delta A = \sum_{s=1}^n Q_s \delta q_s = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N X_{ik} \delta u_{ik} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^n X_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s} \delta q_s$$

odkud vychází

$$Q_s = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^N X_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial q_s} \quad (2.4.10)$$

Jestliže na soustavu působí nekonzervativní síly lze výkon vyjádřit v obecnějším tvaru:

$$\frac{d}{dt}(E_K + E_P) = -hD + \sum_{s=1}^n Q_s \dot{q}_s \quad (2.4.11)$$

V obecném případě nekonzervativní soustavy s rheonomními vazbami budou Lagrangeovy rovnice 2. druhu mít tvar:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial E_K}{\partial q_s} - \frac{\partial E_P}{\partial q_s} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_s} + Q_s(t) = 0 \quad (2.4.12)$$